12 月 23 日(日) 神奈川大学
給費生試験
数学解答速報:理系館

$\boxed{1}$

(1) $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ より

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

なので

$$x-\frac{1}{x}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\underline{\sqrt{5}}\quad\cdots\text{(a)}$$

(2) $10\leqq 4n+1\leqq 100$

を満たす自然数 n を求めると

$$\frac{9}{4}\leqq n\leqq\frac{99}{4}$$

より,

$n=3,4,\cdots,24$ の 22 個

・$n=3$ のとき $4n+1=13$

・$n=24$ のとき $4n+1=97$

であるから,求める和は

$$\frac{22\left(13+97\right)}{2}=\underline{1210}\quad\cdots\text{(b)}$$

(3) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

であり,$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ なので

$$\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$$

$$\theta=\underline{\frac{5}{12}}\pi \quad \cdots \text{(c)}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}-3x\right)=9$

となるとき，

$$(\text{左辺})=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+ax-9x^2}{\sqrt{9x^2+ax}+3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}+3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{9+\frac{a}{x}}+3}$$

$$=\frac{a}{3+3}$$

$$=\frac{a}{6}$$

なので

$$\frac{a}{6}=9$$

より

$a=\underline{54}$ $\cdots$ (d)

(5) 求める点を表す複素数は

$$\left\{\left(2\sqrt{3}+3i\right)-2i\right\}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)+2i=\left(2\sqrt{3}+i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2i=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{11}{2}i} \quad \cdots \text{(e)}$$

(6) $n=12$ となるようなさいころの目の組み合わせは $(1,2,6)$, $(1,3,4)$, $(2,2,3)$ が考えられるので，$n=12$ となる確率は

$$\left(2\times 3!+\frac{3!}{2!}\right)\cdot\frac{1}{6^3}=\frac{15}{6^3}=\underline{\frac{5}{72}} \quad \cdots \text{(f)}$$

また，確率が $\frac{1}{6^3}$ となるのは，出る目の組合せが

$(1,1,1)$, $(3,3,3)$, $(4,4,4)$, $(5,5,5)$, $(6,6,6)$

のときより，そのときの n は $\underline{5}$ 通り．$\cdots$ (g)

$\boxed{2}$

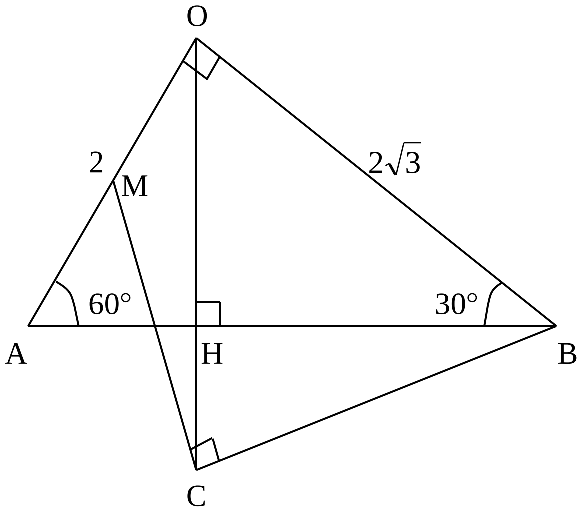
(1) △OAB における余弦定理より

$\mathrm{OB}^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 60^\circ$
$= 4 + 16 - 8$
$= 12$

$\mathrm{OB} > 0$ より

$\mathrm{OB} = 2\sqrt{3}$ なので

$|\vec{b}| = \underline{2\sqrt{3}}$



よって

$\mathrm{OA} : \mathrm{AB} : \mathrm{OB} = 1 : 2 : \sqrt{3}$ なので

$\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$ より

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{0}$

（
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 4^2$

$|-\vec{a}+\vec{b}|^2 = 16$

$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$

$4 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 12 = 16$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{0}$

としてもよい．（こちらが基本解法）
）

(2) (1) より $\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$ なので

$\angle \mathrm{OBH} = 30^\circ$

よって

・ $\mathrm{AH} = \mathrm{OA}\cdot\cos 60^\circ = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$

・ $\mathrm{BH} = \mathrm{OB}\cdot\cos 30^\circ = 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$

より $\mathrm{AH} : \mathrm{HB} = 1 : 3$ であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{3\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b}}{1+3} = \underline{\dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)$

であるから

・ $\overrightarrow{\mathrm{MC}}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+k\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{4}\left\{(3k-2)\vec{a}+k\vec{b}\right\}$

・ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{b}+k\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{4}\left\{3k\vec{a}+(k-4)\vec{b}\right\}$

なので

$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

$\dfrac{1}{4^2}\left\{(3k-2)\vec{a}+k\vec{b}\right\}\cdot\left\{3k\vec{a}+(k-4)\vec{b}\right\}=0$

(1) より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$3k(3k-2)\cdot\left|\vec{a}\right|^2+k(k-4)\cdot\left|\vec{b}\right|^2=0$

$3(3k-2)\cdot 4+(k-4)\cdot 12=0$

$3k-2+k-4=0$

$k=\underline{\dfrac{3}{2}}$

$\boxed{3}$

(1)　$f(x)=\log x$　とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

であるから，C_1 の $(t,\log t)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t)+f(t) \\ &= \frac{1}{t}(x-t)+\log t \\ &= \underline{\frac{1}{t}x+\log t-1} \quad \cdots \text{①} \end{aligned}$$

(2)　$g(x)=a\sqrt{x}$　とおくと

$$g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{x}}$$

である．

ここで，C_1 と C_2 が $x=t$ で共有点をもち，その点において共通の接線をもつならば

$$\begin{aligned} y &= g'(t)(x-t)+f(t) \\ &= \frac{a}{2\sqrt{t}}(x-t)+a\sqrt{t} \\ &= \frac{a}{2\sqrt{t}}x+\frac{a\sqrt{t}}{2} \end{aligned}$$

が①と一致するので，傾きと y 切片の比較より

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t}=\dfrac{a}{2\sqrt{t}} & \cdots \text{③} \\ \log t-1=\dfrac{a\sqrt{t}}{2} & \cdots \text{④} \end{cases}$$

③より

$$a=\frac{2}{\sqrt{t}} \quad \cdots \text{③'}$$

これを④へ代入して

$$\log t-1=1$$

$$\log t=2$$

$$t=e^2$$

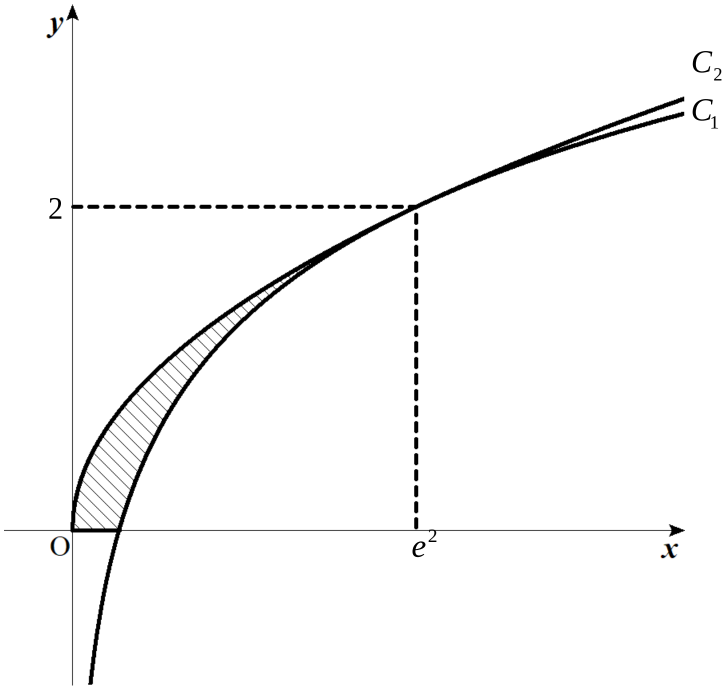
よって，③’から

$$a=\frac{2}{\sqrt{e^2}}=\frac{2}{|e|}=\underline{\frac{2}{e}}$$

であり，

$$f(t)=f\left(e^2\right)=\log e^2=2$$

なので，接点の座標は $\underline{\left(e^2,2\right)}$



(3) (2)より，

$$g(x)=\frac{2}{e}\sqrt{x}$$

であり，求める面積は右図の斜線部の面積より，その値は

$$\int_0^{e^2}\frac{2}{e}\sqrt{x}dx-\int_1^{e^2}\log xdx$$

$$=\frac{2}{e}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e^2}-\left[x\log x-x\right]_1^{e^2}$$

$$=\frac{4}{3e}\left(e^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left\{\left(e^2\log e^2-e^2\right)-\left(1\cdot\log 1-1\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{3}e^2-\left(e^2+1\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{3}e^2-1}$$

以　上

講　師　総　評（数学）

全体的に，基本問題で構成されており，難問は出題されていない．
ただ，見落としや，計算力で差が付きやすい問題が一部あったように思われる．

1

基本問題の小問集合であり，教科書レベルの内容がきちんと理解できていれば十分正解できる問題．
ただし，(f)は$(2,2,2)$のみ除外するのを見落とした受験生もいたように思われる．
（$n=8$は$(1,2,4)$の目の組み合わせでも起こりえるため．）

2

三角比とベクトルの基本問題．

これも特に難しいレベルの問題ではないが，(1)で$|\vec{b}|$を求めた時点で辺の長さの比から直角三角形に気付けると尚良い．
(2)も，$\mathrm{AH}:\mathrm{BH}=s:(1-s)$ でおく解法が一般的であるが，今回有名角からなる直角三角形であるため，直に比が求められることに気づけた受験生はかなりスムーズに解けたであろう．
(3)は一見計算が面倒に思えるが，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であることなどを上手に使って慎重に処理していけばそこまで煩雑にはならない．丁寧に計算した受験生は得点できたはずである．

3

共通接線と面積の標準レベルの問題．(2)にて，接線が一致することを利用した解法が思いつけば(3)まで難なく進めたと思われるが，意外にこのタイプに不慣れな受験生は多いので，差がつくとしたら(2)ではないかと思われる．

以　上

総評付き数学解答速報：株式会社増田塾　理系館