― 千葉工業大学 ―

1 月 31 日　A 日程　数学

解 答・解 説

1

(1) $P(x)$ を x^2-4 で割ったときの商を Q, 余りを $ax+b$ とすると

$P(x)=(x^2-4)Q+ax+b$

である．剰余の定理より

$\begin{cases} P(-2)=-3 \\ P(2)=13 \end{cases}$ なので

$\begin{cases} -2a+b=-3 \\ 2a+b=13 \end{cases}$

これを解くと　$a=4,\ b=5$　であるから，求める余りは

$\underline{4x+5}$ … [ア,イ]

(2) 変量 [ウ] の値を a とすると，6 個の値の平均値が 6 なので

$$\frac{3+6+2+a+11+9}{6}=6$$

これを解いて　$a=\underline{5}$ … [ウ]

また，分散は

$$\frac{1}{6}\left\{(3-6)^2+(6-6)^2+(2-6)^2+(5-6)^2+(11-6)^2+(9-6)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(9+0+16+1+25+9)$$

$=\underline{10}$ … [エオ]

(3) $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ の x^5 一般項は

$${}_5C_3\cdot\left(x^3\right)^3\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^2=\frac{5\cdot4}{2}\cdot2^2\cdot x^5=40x^5$$

であるから，求める係数は $\underline{40}$ … [カキ]

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\left\{(-2)^{k-1}+4k\right\}=\frac{1-(-2)^8}{1-(-2)}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot8\cdot(8+1)=-85+144=\underline{59}$ … [クケ]

(5) $x=\dfrac{[コ]}{[サ]}$ とする.

$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}+x\vec{b}\right)$ のとき

$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+x\vec{b}\right)=0$ より

$$\left|\vec{a}\right|^2+(x-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-x\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^2+(x-1)\cdot\frac{1}{2}-x\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$4+x-1-6x=0$$

$x=\underline{\dfrac{3}{5}}$ … [コ,サ]

(6) $f(x)=2^{x+1}-\sqrt{2^x}+1$

$$=2\cdot2^x-\left(\sqrt{2}\right)^x+1$$

$$=2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{2x}-\left(\sqrt{2}\right)^x+1$$

$$=2\left\{\left(\sqrt{2}\right)^{2x}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^x\right\}+1$$

$$=2\left\langle\left\{\left(\sqrt{2}\right)^x-\frac{1}{4}\right\}^2-\frac{1}{16}\right\rangle+1$$

$$=2\left\{\left(\sqrt{2}\right)^x-\frac{1}{4}\right\}^2+\frac{7}{8}$$

であるから, $f(x)$ は

$\left(\sqrt{2}\right)^x=\dfrac{1}{4}$ すなわち $x=\underline{-4}$ … [シス]

のとき最小値をとり, その値は $\underline{\dfrac{7}{8}}$ … [セ,ソ]

(7) $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,-1,2)$, $\mathrm{B}(-1,2,1)$, $\mathrm{C}(x,-11,2)$ とする. このとき

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}x\\-11\\2\end{pmatrix}$ であり, C が平面 OAB 上の点であるとき

s, t を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

と表すことができるので，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s-t \\ -s+2t \\ 2s+t \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{cases} x=s-t \\ -11=-s+2t \\ 2=2s+t \end{cases}$$

これを解いて

$s=3$, $t=-4$, $x=\underline{7}$ … [タ]

(8) $|x-1|=\begin{cases} -(x-1) & (0\leqq x\leqq 1) \\ x-1 & (1\leqq x\leqq 2) \end{cases}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2|x-1|dx &= -\int_0^1 x^2(x-1)dx+\int_1^2 x^2(x-1)dx \\
&= -\int_0^1 (x^3-x^2)dx+\int_1^2 (x^3-x^2)dx \\
&= -\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \\
&= -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\left\{\frac{1}{4}(2^4-1^4)-\frac{1}{3}(2^3-1^3)\right\}_1^2 \\
&= -\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{15}{4}-\frac{7}{3} \\
&= \underline{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

… [チ,ツ]

2

(1) $F=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\left(x-\dfrac{4}{x}\right)-7x-\dfrac{14}{x}+15$

$=x^2-7x+10-\dfrac{14}{x}+\dfrac{4}{x^2}$

$=x^2+\dfrac{4}{x^2}-7\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+10$

$=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-4-7\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+10$

$=\underline{\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-7\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+6}$ $\cdots$ [ア,イ,ウ]

$X=x+\dfrac{2}{x}$ とすると，$0<x$，$0<\dfrac{2}{x}$ であるから，相加平均，相乗平均の関係より

$x+\dfrac{2}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}$ すなわち

$X\geqq \underline{2\sqrt{2}}$ $\cdots$ [エ,オ]

（等号となるのは $x=\dfrac{2}{x}$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のとき.）

であり，このとき

$F=0$ を解くと

$X^2-7X+6=0$

$(X-1)(X-6)=0$

$X\geqq 2\sqrt{2}$ より

$X=6$

$x+\dfrac{2}{x}=6$

$x^2-6x+2=0$

$x=\underline{3\pm\sqrt{7}}$ $\cdots$ [カ,キ]

(2) $a=3$ となるのは1のカードと2のカードを1枚ずつ引けばよいので，$a=3$ となる確率は

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{1\cdot 3}{\frac{5\cdot 4}{2}}=\underline{\frac{3}{10}}\quad\cdots\ [ク,ケコ]$$

このとき, 袋の中には赤玉と白玉が3個ずつ入っているので，赤玉は

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

の確率で取り出される.

よって，$a=3$ となり，かつ赤玉が取り出される確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{3}{20}}\quad\cdots\ [サ,シス]$$

$a=4$　となるのは

「1のカードと3のカードを1枚ずつ引く」か「2のカードを2枚ずつ引く」のいずれかの場合より，その確率は

$$\frac{{}_1C_1\cdot{}_1C_1+{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{1\cdot 1+3}{\frac{5\cdot 4}{2}}=\frac{2}{5}$$

このとき，袋の中には4個の赤玉と2個の白玉が入っているので，赤玉は

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

の確率で取り出される.

よって，$a=4$ となり，かつ赤玉が取り出される確率は

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\frac{4}{15}}\quad\cdots\ [セ,ソタ]$$

a のとりうる値は　$a=3,4,5$　が考えられる.

$a=5$ となるのは2のカードと3のカードを1枚ずつ引くときより，その確率は

$$\frac{{}_3C_2\cdot{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{3\cdot 1}{\frac{5\cdot 4}{2}}=\frac{3}{10}$$

このとき，袋の中には5個の赤玉と1個の白玉が入っているので，赤玉は $\frac{5}{6}$ の確率で取り出される.

よって，$a=5$ となり，かつ赤玉が取り出される確率は

$$\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$$

以上から，赤玉が取り出される確率は,

$$\frac{3}{20}+\frac{4}{15}+\frac{1}{4}=\frac{40}{60}=\underline{\frac{2}{3}}\quad\cdots\ [チ,ツ]$$

3

(1)
$$\begin{cases} \log_2\left(x\sqrt{y}\right) = -3 & \cdots ① \\ \log_2\left(\sqrt[3]{4x^4}\right) - \log_8(32y) = -2 & \cdots ② \end{cases}$$

$X = \log_2 x$, $Y = \log_2 y$ とすると，①は

$$\log_2 x + \log_2 \sqrt{y} = -3$$

$$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y = -3$$

$2\log_2 x + \log_2 y = -6$ より

$\underline{2X + Y = -6}$ $\cdots$ ①'　$\cdots$ [ア,イウ]

②は

$$\frac{1}{3}\log_2 4x^4 - \frac{\log_2(32y)}{\log_2 8} = -2$$

$$\frac{1}{3}\left(\log_2 4 + \log_2 x^4\right) - \frac{1}{3}\left(\log_2 32 + \log_2 y\right) = -2$$

$$(2 + 4\log_2 x) - (5 + \log_2 y) = -6$$

$\underline{4X - Y = -3}$ $\cdots$ ②'　$\cdots$ [エ,オカ]

①', ②' より

$$\begin{cases} X = -\frac{3}{2} \\ Y = -3 \end{cases}$$ なので

$$\begin{cases} \log_2 x = -\frac{3}{2} \\ \log_2 y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{4}} & \cdots [キ,ク] \\ y = 2^{-3} = \underline{\frac{1}{8}} & \cdots [ケ,コ] \end{cases}$$

(2)　$\cos C = \dfrac{4}{5}$，$0 < C < 180°$ より　$\sin C = \dfrac{3}{5}$　… [サ,シ]

$A = 180° - (B + C) = 180° - (45° + C) = 135° - C$

であるから

$$\sin A = \sin(135° - C) = \sin 135° \cos C - \cos 135° \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \underline{\frac{7\sqrt{2}}{10}} \quad \cdots \ [ス,セ,ソタ]$$

$BC = 7$　のとき，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$$

$$CA \sin A = BC \sin B$$

$$CA \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$CA = \underline{5}$　…　[チ]

同様，正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$AB \sin A = BC \sin C$$

$$AB \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7 \cdot \frac{3}{5}$$

$$AB = 3\sqrt{2}$$

よって，△ABC の内接円の半径を r とすると，面積について

$$\frac{r}{2}(AB + BC + CA) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$r(3\sqrt{2} + 7 + 5) = 3\sqrt{2} \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r(3\sqrt{2} + 12) = 21$$

$$r = \frac{21}{3\sqrt{2} + 12} = \frac{7}{4 + \sqrt{2}} = \frac{7(4 - \sqrt{2})}{(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})} = \frac{7(4 - \sqrt{2})}{16 - 2} = \underline{\frac{4 - \sqrt{2}}{2}} \quad \cdots \ [ツ,テ,ト]$$

4

(1)　C の頂点は $(0,\ -6)$ であり，D の頂点を (c,d) とおくと，この 2 頂点が $\mathrm{A}(2,0)$ に関して対称であるから

$$\begin{cases}\dfrac{0+c}{2}=2\\[2mm]\dfrac{-6+d}{2}=0\end{cases}$$ より $\begin{cases}c=4\\d=6\end{cases}$ である．よって D の方程式から

$$-2x^2+ax+b=-2(x-4)^2+6$$

$$=-2x^2+16x-26$$

であるから，係数を比較して

$a=\underline{16}$ … [アイ]，$b=\underline{-26}$ … [ウエオ]

(2)　C と D は $\mathrm{A}(2,0)$ に関して対称であり，l は m の値に関わらず点 A を通るので，C と l が異なる 2 個の共有点をもつ条件と，D と l が異なる 2 個の共有点をもつ条件は等しい．よって C と l の方程式から

$2x^2-6=m(x-2)$ すなわち

$2x^2-mx+2m-6=0$ … ①

が異なる 2 個の実数解をもてばよいので

$$(-m)^2-4\cdot2\cdot(2m-6)>0$$

$$m^2-16m+48>0$$
$$(m-4)(m-12)>0$$

$\underline{m<4,12<m}$ … [カ,キク] … ②

(3)　$0<m<4$ のとき，α と β は①の 2 実数解より，解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\underline{\dfrac{1}{2}m} & \cdots\ [ケ,コ]\\[2mm]\alpha\beta=m-3\end{cases}$$

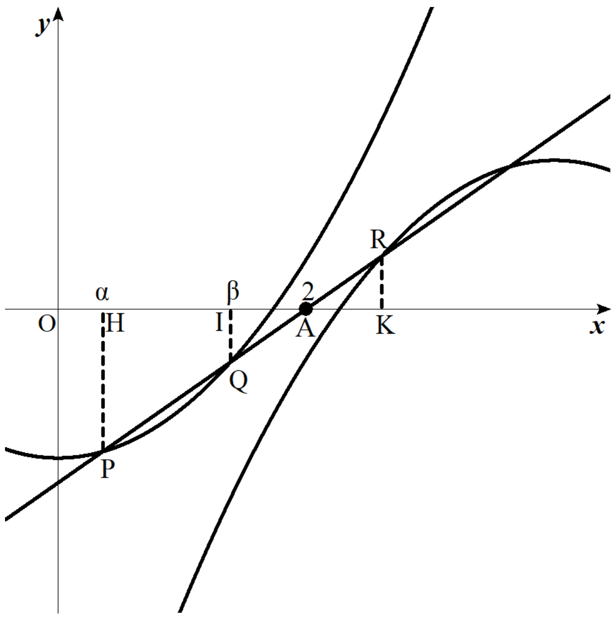
である．

l は $\mathrm{A}(2,0)$ を通り，C と D は A に関して対称なので Q から x 軸に下した垂線の足を I とすると，右図のように

$\mathrm{HA}=2-\alpha$

$\mathrm{AK}=\mathrm{IA}=2-\beta$

であるから



$$\mathrm{HK}=\mathrm{HA}+\mathrm{AK}=(2-\alpha)+(2-\beta)=4-(\alpha+\beta)=\underline{4-\frac{1}{2}m}\ \cdots\ [サ,シ,ス]$$

(4)　$f(x)=2x^2-6$　とする．このとき

$$\mathrm{PH}=|f(\alpha)|=-f(\alpha)=-2\alpha^2+6$$

(3)より

$\mathrm{RK}=\mathrm{QI}=|f(\beta)|=-f(\beta)=-2\beta^2+6$ であるから

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{PHK}+\triangle\mathrm{RHK}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{HK}\cdot\mathrm{PH}+\frac{1}{2}\mathrm{HK}\cdot\mathrm{RK}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{HK}(\mathrm{PH}+\mathrm{RK})\\&=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}m\right)\{(-2\alpha^2+6)+(-2\beta^2+6)\}\\&=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}m\right)\{12-2(\alpha^2+\beta^2)\}\\&=\left(4-\frac{1}{2}m\right)\{6-(\alpha^2+\beta^2)\}\ \cdots\ ③\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{1}{2}m\right)^2-2(m-3)=\frac{1}{4}m^2-2m+6$$

であるから，③より

$$\begin{aligned}S&=\left(4-\frac{1}{2}m\right)\left\{6-\left(\frac{1}{4}m^2-2m+6\right)\right\}\\&=-\left(4-\frac{1}{2}m\right)\left(\frac{1}{4}m^2-2m\right)\\&=\underline{\frac{1}{8}m^3-2m^2+8m}\ \cdots\ [セ,ソ,タ,チ]\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dm}&=\frac{3}{8}m^2-4m+8\\&=\frac{1}{8}(3m^2-32m+64)\\&=\frac{1}{8}(3m-8)(m-8)\end{aligned}$$

m	0		$\frac{8}{3}$		4
$\frac{dS}{dm}$		$+$	0	$-$	
S		↗	最大	↘	

であるから，$0<m<4$　における S の増減は右上のようになる．

よって S は $m=\dfrac{8}{3}$ のとき最大となり，その値は

$$S=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{8^2}{27}-\frac{2\cdot 8^2}{9}+\frac{8^2}{3}$$

$$=\frac{8^2-6\cdot 8^2+9\cdot 8^2}{27}$$

$$=\frac{4\cdot 8^2}{27}$$

$$=\underline{\frac{256}{27}}\quad\cdots\ [\text{ツテト,ナニ}]$$

総 評

1

基本問題の小問集合であり完答したい.

2

(1) は記述で「F の最大値を求めよ.」とだけある問題ならばそこそこ難しい問題になるが, 丁寧な誘導がされており, レベルとしては標準寄りの基本問題といった内容.
ただし, X の範囲で相加平均と相乗平均の関係を利用するところは, 慣れていない受験生はつまづいてしまいがちである.
(2) もセンター試験のような, 最初は丁寧に解き方を誘導してくれ, 後半は自分で同じように模倣していけばよい易しい問題である.

3

(1) は対数の連立方程式を解いていく問題であり, 置き換えの誘導もあるためそこまで難しくはないが, 対数の演算や底の変換などは苦手な受験生も多いため計算ミスをした者もいたのではないか. とはいえレベルとしては基本レベルである.
(2) は三角比, 三角関数の基本問題であり, 正弦定理や加法定理, 面積公式が使えればそこまで苦労はしない内容である. 最後の, 三角形の内接円の半径は面積の関係式を利用するというのも受験生であれば覚えておかねばならない典型問題である.

4

これまでの問題と比べるとなかなか難しい問題と言える. C と D が頂点だけではなく, グラフ自体が A に関して対称であるということが見抜けないとおそらく後半の α と β の対称式が利用できず計算がかなり大変になり完答は難しく差のつく問題である.