― 芝浦工業大学 ―

2 月 1 日　前期日程　数学

解 答・解 説

1

(1)　$p: n^2+1=0$ ならば $n=-1$

とすると，命題 p の裏は「$\underline{n^2+1\neq 0 \text{ ならば } n\neq -1}$」 … (ア)

である．

また，命題 p は<u>偽</u> … (イ)

である．

(2)　A が赤いカードを n 枚取り出す事象を A_n とすると

$$P(A_0)=\frac{{}_7C_2}{{}_9C_2}=\frac{\frac{7\cdot 6}{2}}{\frac{9\cdot 8}{2}}=\frac{7}{12}$$

$$P(A_1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_7C_1}{{}_9C_2}=\frac{2\cdot 7}{\frac{9\cdot 8}{2}}=\frac{7}{18}$$

であるから

$$P(X)=P(A_0)+P(A_1)=\frac{7}{12}+\frac{7}{18}=\underline{\frac{35}{36}} \quad \cdots \text{(ウ)}$$

である．

$$P(A_0\cap Y)=\frac{7}{12}\left(\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}+\frac{{}_2C_1\cdot{}_5C_1}{{}_7C_2}\right)=\frac{7}{12}\cdot\frac{\frac{5\cdot 4}{2}+2\cdot 5}{\frac{7\cdot 6}{2}}=\frac{7}{12}\cdot\frac{20}{21}=\frac{5}{9}$$

$$P(A_1\cap Y)=P(A_1)=\frac{7}{18} \quad \leftarrow \ A_1 \text{ の後は赤いカードは1枚しか袋にないため．}$$

であるから

$$P(X\cap Y)=P(A_0\cap Y)+P(A_1\cap Y)=\frac{5}{9}+\frac{7}{18}=\frac{17}{18}$$

よって，X が起こったときの Y が起こる確率は

$$\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{17}{18}}{\frac{35}{36}}=\underline{\frac{34}{35}} \quad \cdots \text{(エ)}$$

(3) $a_{n+1}-10=\dfrac{a_n-10}{2n(a_n-10)+1}$ $\cdots$ ①

$b_n=\dfrac{1}{a_n-10}$ すなわち $a_n-10=\dfrac{1}{b_n}$ とおくと，①は

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{\frac{1}{b_n}}{\frac{2n}{b_n}+1}=\frac{1}{2n+b_n}\quad\cdots\ ②$$

②の逆数から

$b_{n+1}=b_n+2n$ ← $\{b_n\}$の階差数列型漸化式

であるから，$2\leqq n$ において

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}2k$$
$$=\frac{1}{11-10}+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$
$$=n^2-n+1$$

これは $\dfrac{1}{b_1}=1$ も満たす.

よって

$$b_n=n^2-n+1$$

であり，

$a_n-10=\dfrac{1}{b_n}$ であったから

$$a_n=\frac{1}{b_n}+10$$

より

$$a_{11}=\frac{1}{b_{11}}+10=\frac{1}{11^2-11+1}+10=\underline{\frac{1111}{111}}\quad\cdots\ \boxed{（オ）}$$

2

放物線Cは点$(1,0)$と$(4,0)$を通るので

C：$y=a(x-1)(x-4)$（$a\neq 0$）… ①

と表すことができる.

(1)　Cが$(0,\ -8)$ を通るとき

$-8=a(0-1)(0-4)$

$a=-2$

であるから，①より，このときのCの方程式は

$y=-2(x-1)(x-4)$

ここで①よりCの頂点を$P(X,Y)$とすると

$$X=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$$

なので,

$$Y=-2(X-1)(X-4)=-2\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-4\right)=\frac{9}{2}$$

よって，このときのCの頂点は$\underline{\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)}$

(2)　C上のすべての点がEに属するには,

$a(x-1)(x-4)\geqq -x-2$

$ax^2+(-5a+1)x+4a+2\geqq 0$

がすべてのxで満たされればよい.

そのためには

（ⅰ）$a>0$

（ⅱ）$ax^2+(-5a+1)x+4a+2=0$ の判別式をD_1としたとき$D_1\leqq 0$

をともに満たせばよい.

(ⅱ)について

$D_1\leqq 0$

$(-5a+1)^2-4\cdot a\cdot(4a+2)\leqq 0$

$9a^2-18a+1\leqq 0$

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\leqq a\leqq\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\quad\cdots\ ②$$

これは(ⅰ)を満たしている.

②より，このy座標が最大となるのは $a=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3}$ のときで，その値は

$$y=a\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-4\right)=-\frac{9}{4}\cdot\frac{3-2\sqrt{2}}{3}=\underline{\frac{6\sqrt{2}-9}{4}}$$

(3) C 上のすべての点が F に属さないためには,

$$\begin{cases} a(x-1)(x-4)\leqq x \\ a(x-1)(x-4)\leqq 3x \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} ax^2+(-5a-1)x+4a\leqq 0 \\ ax^2+(-5a-3)x+4a\leqq 0 \end{cases}$$

の 2 式がすべての x で満たされればよい.

そのためには

（ｉ） $a<0$

（ⅱ） $ax^2+(-5a-1)x+4a=0$ の判別式を D_2 としたとき $D_2\leqq 0$

（ⅲ） $ax^2+(-5a-3)x+4a=0$ の判別式を D_3 としたとき $D_3\leqq 0$

をすべて満たせばよい.

（ⅱ）について

$D_2\leqq 0$

$$(-5a-1)^2-4a\cdot 4a=0$$

$$9a^2+10a+1\leqq 0$$
$$(9a+1)(a+1)\leqq 0$$
$$-1\leqq a\leqq -\frac{1}{9}\quad\cdots\ ③$$

（ⅲ）について

$D_3\leqq 0$

$$(-5a-3)^2-4a\cdot 4a=0$$

$$9a^2+30a+9\leqq 0$$
$$3a^2+10a+3\leqq 0$$
$$(3a+1)(a+3)\leqq 0$$
$$-3\leqq a\leqq -\frac{1}{3}\quad\cdots\ ④$$

$a<0$ および③, ④の共通部分より

$$-1\leqq a\leqq -\frac{1}{3}\quad\cdots\ ⑤$$

のとき， C 上のすべての点が E に属さない.

(2) より， $Y=-\frac{9}{4}a$ であったから, ⑤より

$$-\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\leqq Y\leqq-\frac{9}{4}\cdot(-1)$$

$$\underline{\frac{3}{4}\leqq Y\leqq\frac{9}{4}}$$

3

(1) 三角形の内角の和より

$$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha \quad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{4}<\alpha+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

$$1<\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$$

$$\underline{1<\sin\alpha+\sin\beta\leqq\sqrt{2}} \quad \cdots \quad \boxed{（ア）}$$

(2)
$$\begin{cases} \left|\vec{u}\right|=1 \\ \vec{u}\perp\vec{a} \quad \text{であるから} \\ \vec{u}\perp\vec{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left|\vec{u}\right|^2=1 \\ \vec{u}\cdot\vec{a}=0 \\ \vec{u}\cdot\vec{b}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+(-x)^2=1 \\ x+sy+x=0 \\ x+3y+sx=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2=1 \quad \cdots \quad ① \\ 2x+sy=0 \quad \cdots \quad ② \\ (s+1)x+3y=0 \quad \cdots \quad ③ \end{cases}$$

③$\times s-$②$\times 3$ より

$$(s^2+s-6)x=0$$

$$(s-2)(s+3)x=0 \quad \cdots \quad ④$$

ここで，$xy>0$ なので，x と y は符号が同じ 0 でない実数であり，また②より

$2x = -sy$

なので

$-s > 0$ すなわち $s < 0$ であるから，④より

$s = -3$

よって②より

$2x - 3y = 0$ すなわち $y = \dfrac{2}{3}x$

これを①へ代入して

$$2x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 1$$

$$2x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 1$$

$x^2 = \dfrac{9}{22}$ より $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{22}}$

以上から $x = \underline{\pm\dfrac{3}{\sqrt{22}}}$ … $\boxed{（イ）}$， $s = \underline{-3}$ … $\boxed{（ウ）}$

(3) $$z = \frac{6i}{\sqrt{3}-3i} = \frac{6i(\sqrt{3}+3i)}{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}+3i)} = \frac{1}{2}(-3+\sqrt{3}i) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$= \sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$$

より，ド・モアブルの定理より

$$z^n = (\sqrt{3})^n\left(\cos\frac{5n}{6}\pi + i\sin\frac{5n}{6}\pi\right)$$

なので z^n が実数となる最小の自然数 n は $\underline{6}$ … $\boxed{（エ）}$

であり，そのときの値は

$z^6 = (\sqrt{3})^6(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = \underline{-27}$ … $\boxed{（オ）}$

4

(1) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$ より

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = -e^t(\sin t - \cos t) \\ \dfrac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t) \end{cases}$$

であるから

$$l(s) = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^s \sqrt{\{-e^t(\sin t - \cos t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2}\,dt$$

$$= \int_0^s \sqrt{(e^t)^2(1 - 2\sin t\cos t) + (e^t)^2(1 + 2\sin t\cos t)}\,dt$$

$$= \int_0^s \sqrt{2}e^t\,dt$$

$$= \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^s$$

$$= \sqrt{2}(e^s - e^0)$$

$$= \underline{\sqrt{2}(e^s - 1)}$$

(2) $u = \sqrt{2}(e^s - 1)$ … ①

とおく.

$0 \leqq s$ であるから，このとき $0 \leqq u$ であり，①を整理すると

$$e^s = \frac{u}{\sqrt{2}} + 1$$

この両辺の値は常に正であるから，

$$\log e^s = \log\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$s = \log\left(\frac{u}{\sqrt{2}} + 1\right)$$

よって①の逆関数は

$$u=\log\left(\frac{s}{\sqrt{2}}+1\right)=\log\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\ (0\leqq s)$$

であるから

$$\underline{m(s)=\log\frac{\sqrt{2}s+2}{2}\ (0\leqq s)}$$

(3) $\begin{cases} x=e^{m(s)}\cos m(s) \\ y=e^{m(s)}\sin m(s) \end{cases}$ のとき

$m'(s)=\dfrac{d}{ds}m(s)$ として

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds}=m'(s)\cdot e^{m(s)}\cdot\cos m(s)-m'(s)\cdot e^{m(s)}\cdot\sin m(s)=-m'(s)\cdot e^{m(s)}\{\sin m(s)-\cos m(s)\} \\ \dfrac{dy}{ds}=m'(s)\cdot e^{m(s)}\cdot\sin m(s)+m'(s)\cdot e^{m(s)}\cdot\cos m(s)=m'(s)\cdot e^{m(s)}\{\sin m(s)+\cos m(s)\} \end{cases}$$

であるから

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left\langle -m'(s)\cdot e^{m(s)}\{\sin m(s)-\cos m(s)\}\right\rangle^2+\left\langle m'(s)\cdot e^{m(s)}\{\sin m(s)+\cos m(s)\}\right\rangle^2}$$

$$=\sqrt{\{m'(s)\}^2\cdot\{e^{m(s)}\}^2\left\langle\{1-2\sin m(s)\cos m(s)\}+\{1+2\sin m(s)\cos m(s)\}\right\rangle^2}$$

$$=\sqrt{2}\left|m'(s)\right|\cdot\left|e^{m(s)}\right|\quad\cdots\ ②$$

(1) より

$$m'(s)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}s+2}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}s+2}>0$$

$$e^{m(s)}=e^{\log\frac{\sqrt{2}s+2}{2}}=\frac{\sqrt{2}s+2}{2}>0$$

であるから，②へ代入して

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}s+2}\cdot\frac{\sqrt{2}s+2}{2}=\underline{1}$$

総 評

1

(1)は命題の真偽の基本問題であるが，命題の仮定は本当はn^3であり，出題者がn^2と書き間違えたのではないかと個人的に感じる．
(2)も基本的な問題ではあるが，$\boxed{\text{（エ）}}$が条件付確率であることに気づかない，もしくは気づけても分からなかったという受験生もいるのではないかと思われる．条件付確率の言い回しや，計算は苦手な受験生が多い．
(3)も親切な誘導がついているので，それに従えばそこまで難しい内容ではない．

2

二次関数の頂点に関する問題．普通二次関数は $y=ax^2+bx+c$ か $y=a(x-p)^2+q$ の形で一般化することが多いが，今回のようなx軸との交点が2個ともわかっている場合は $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ の形で表され, さらにこのときは軸が $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ である．このことができたうえで，(2), (3)はCの各条件を求めることができればそこまで難しくはない．

3

どれも基本的な内容であるが，(1)は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ の三角比の変形や，三角関数の合成といった，基礎を疎かにすると得点ができない，また(2)は，$xy>0$ の意味（xとyが同符号で0でないこと）の把握や，連立方程式の丁寧な処理を怠ると間違えそうである．
(3)は複素数平面の基本問題である．

4

道のり，逆関数，速度の大きさの問題である．各分野のなかでは決して難しい内容の問題ではないのであるが，そもそもこの分野は受験生(特に現役生)が，学習を疎かにしてしまいがちな内容であることが多く，そこまで深く勉強していなくても，まんべんなく学習してきた受験生はとれたが，そうでない受験生の中には問題を見ただけでも嫌になった者もいると思う．さらに，(3)の計算は工夫が必要であり，これらの理由から本問は学習の丁寧さで差のついた問題ではないかと思われる．