― 芝浦工業大学 ―

2月2日　前期日程　数学

解答・解説

1

(1) 1と2のカードを一塊と考え，その中での並び替えも考慮すると，求める確率は

$\dfrac{4!\cdot 2!}{5!}=\underline{\dfrac{2}{5}}$ … $\boxed{(ア)}$

(2) $f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは $x=-\dfrac{a}{2}$ を軸とした下に凸の放物線となる．

$1\leqq x\leqq 4$ において $f(x)$ は最大値が5，最小値が1 である場合，

（i）$-\dfrac{a}{2}<1$ すなわち

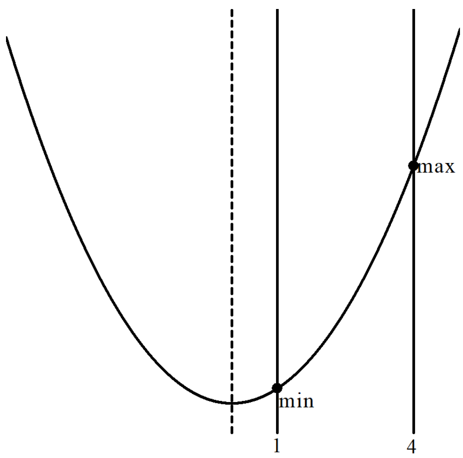
$-2<a$ のとき

$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(4)=5 \end{cases}$

$\begin{cases} 1+a+b=1 \\ 16+4a+b=5 \end{cases}$

$\begin{cases} a+b=0 \\ 4a+b=-11 \end{cases}$

これを解くと，a, b は整数とならず不適．

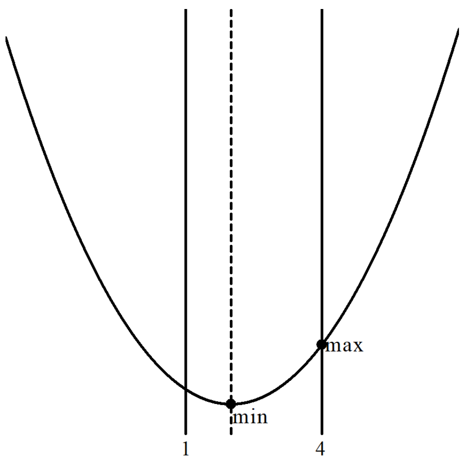


（ii）$1\leqq -\dfrac{a}{2}<\dfrac{5}{2}$ すなわち

$-5<a\leqq -2$ のとき

$\begin{cases} f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=1 \\ f(4)=5 \end{cases}$

$\begin{cases} -\dfrac{a^2}{4}+b=1 \\ 16+4a+b=5 \end{cases}$



$$\begin{cases} b=\dfrac{a^2}{4}+1 \\ 4a+b+11=0 \end{cases}$$

より

$$\frac{a^2}{4}+4a+12=0$$

$$a^2+16a+48=0$$

$$(a+4)(a+12)=0$$

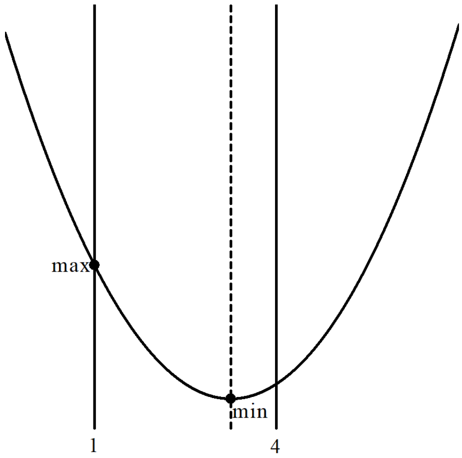
$-5<a\leqq -2$　より　$a=-4$

このとき　$b=5$

よって a，b ともに整数となる．

（iii）$\dfrac{5}{2}\leqq -\dfrac{a}{2}<4$　すなわち

$-8<a\leqq -5$　のとき



$$\begin{cases} f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=1 \\ f(1)=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{a^2}{4}+b=1 \\ 1+a+b=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\dfrac{a^2}{4}+1 \\ a+b-4=0 \end{cases}$$

より

$$\frac{a^2}{4}+a-3=0$$

$$a^2+4a-12=0$$

$$(a+6)(a-2)=0$$

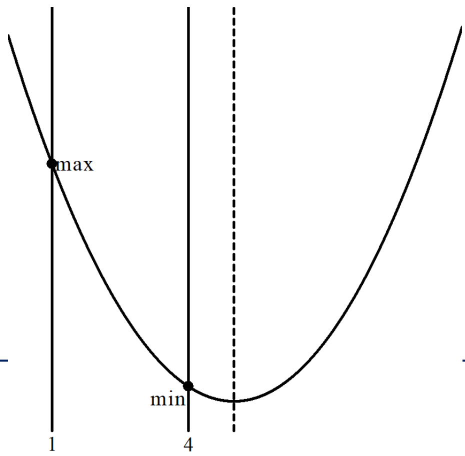
$-8<a\leqq -5$　より　$a=-6$

このとき　$b=10$

よって a，b ともに整数となる．

（iv）$4\leqq -\dfrac{a}{2}$　すなわち

$a\leqq -8$　のとき



$$\begin{cases} f(4)=1 \\ f(1)=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16+4a+b=1 \\ 1+a+b=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a+b=-15 \\ a+b=4 \end{cases}$$

これを解くと，a , b は

整数とならず不適.

以上から　$\underline{a=-4,\ -6}$　… $\boxed{（イ）}$

また，$1 \leqq x \leqq 4$　において $f(x)=0$　が異なる2個の実数解をもつには，次の(イ)，(ロ)，(ハ)　をすべて満たせばよい.

(イ)　$f(x)=0$　の判別式を D とすると　$D>0$　であればよいから

$a^2-4b>0$

$a^2>4b$　… ①

(ロ)　$y=f(x)$　の軸が　$1<x<4$　に存在する，すなわち

$$1<-\frac{a}{2}<4$$

$-8<a<-2$　… ②

(ハ)　$\begin{cases} f(1)>0 \\ f(4)>0 \end{cases}$　すなわち

$$\begin{cases} 1+a+b>0 \\ 16+4a+b>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b>-a-1 \\ b>-4a-16 \end{cases} \quad \cdots ③$$

をともに満たす

②より　$a=-7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3$　が考えられる.

各場合の①, ③を調べると

・$a=-7$　のとき

$\begin{cases} 49>4b \\ b>6 \\ b>12 \end{cases}$　であるが，これらを同時に満たす整数 b は存在しない.

・$a=-6$　のとき

$\begin{cases} 9>b \\ b>5 \\ b>8 \end{cases}$　であるが，これらを同時に満たす整数 b は存在しない.

・$a=-5$　のとき

$\begin{cases} 25>4b \\ b>4 \\ b>4 \end{cases}$　であり，これらを同時に満たす整数 b は　$b=5,6$

・$a=-4$ のとき

$$\begin{cases}4>b\\b>3\\b>0\end{cases}$$ であるが，これらを同時に満たす整数bは存在しない.

・$a=-3$ のとき

$$\begin{cases}9>4b\\b>2\\b>-4\end{cases}$$ であるが，これらを同時に満たす整数bは存在しない.

以上から，条件を満たす(a,b)は$(a,b)=(-5,5),(-5,6)$の$\underline{2}$個 … $\boxed{\text{（ウ）}}$

(3) $(n+3)a_{n+2}-(2n+3)a_{n+1}+na_n=0$

$(n+3)a_{n+2}-(n+3)a_{n+1}-na_{n+1}+na_n=0$

$(n+3)(a_{n+2}-a_{n+1})=n(a_{n+1}-a_n)$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{n}{n+3}(a_{n+1}-a_n)$$ より

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n-1}{n+2}\cdot\frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}(a_2-a_1)$$

$$=\frac{6}{(n+2)(n+1)n}(2-1)$$

$$=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}$$ … $\boxed{\text{（エ）}}$

ここで

$$\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

であるから

$$a_{n+1}-a_n=3\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$ より

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n+1}-a_n)=\sum_{k=1}^{n-1}3\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$ … ②

ここで

・$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{n+1}-a_n)=-\sum_{k=1}^{n-1}(a_n-a_{n+1})$$

$$=-\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\}$$

$$=-(a_1-a_n)$$

$$=a_n-1$$

・$$\sum_{k=1}^{n-1}3\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=3\left\langle\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}\right\rangle$$

$$=3\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{n(n+1)}$$

であるから，これらを②へ代入して

$$a_n-1=\frac{3}{2}-\frac{3}{n(n+1)}$$

$$a_n=\frac{5}{2}-\frac{3}{n(n+1)}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\underline{\frac{5}{2}}\quad\cdots\quad\boxed{（オ）}$$

2

(1)　求める接線を

$l: y=2x+k$

とおく．

このとき

$$\frac{x^2}{2}+\frac{(2x+k)^2}{3}=1$$

が重解をもつので，この式を整理して

$11x^2+8kx+2k^2-6=0$ … ①

であるから，この方程式の判別式を D とすると

$$D/4=0$$

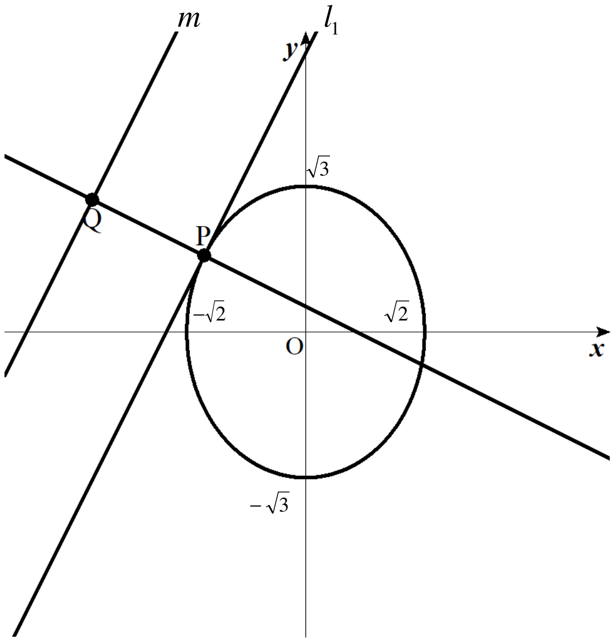
$$(4k)^2-11\cdot(2k^2-6)=0$$

$$k^2=11$$

よって　$k=\pm\sqrt{11}$　であるから，求める接線の方程式は

$l: y=2x\pm\sqrt{11}$

(2)　$\begin{cases} l_1: y=2x+\sqrt{11} \\ m: y=2x+2\sqrt{11} \end{cases}$　とする．



$l_1 /\!/ m$ なので，PQ が最短となるのは，右図のように P が C と l_1 の接点であり，Q は P から m に下した垂線の足であるときである．

このときの P の x 座標は，①に $k=\sqrt{11}$ を代入した式の重解より，これを解くと

$$11x^2+8\sqrt{11}x+16=0$$

$$\left(\sqrt{11}x+4\right)^2=0$$

$$x=-\frac{4}{\sqrt{11}}=-\frac{4\sqrt{11}}{11}$$

l_1 の方程式から，P の y 座標は

$$y=2\cdot\left(-\frac{4\sqrt{11}}{11}\right)+\sqrt{11}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

よって

$$\mathrm{P}\left(-\frac{4\sqrt{11}}{11},\ \frac{3\sqrt{11}}{11}\right)$$

このときのPQの長さは点Pと直線 $m: 2x-y+2\sqrt{11}=0$ の距離と等しいので

$$\mathrm{PQ}=\frac{\left|2\cdot\left(-\frac{4\sqrt{11}}{11}\right)-\frac{3\sqrt{11}}{11}+2\sqrt{11}\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\sqrt{11}\right|}{\sqrt{5}}=\underline{\sqrt{\frac{11}{5}}}$$

(3) $\mathrm{P}\left(-\frac{4\sqrt{11}}{11},\ \frac{3\sqrt{11}}{11}\right)$ を通り，$l_1: y=2x+\sqrt{11}$ と垂直な直線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{4\sqrt{11}}{11}\right)+\frac{3\sqrt{11}}{11}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{11}}{11}$$

であり，この直線と $m: y=2x+2\sqrt{11}$ の交点が(2)における点Qである．

Qの x 座標は

$$2x+2\sqrt{11}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{11}}{11}$$

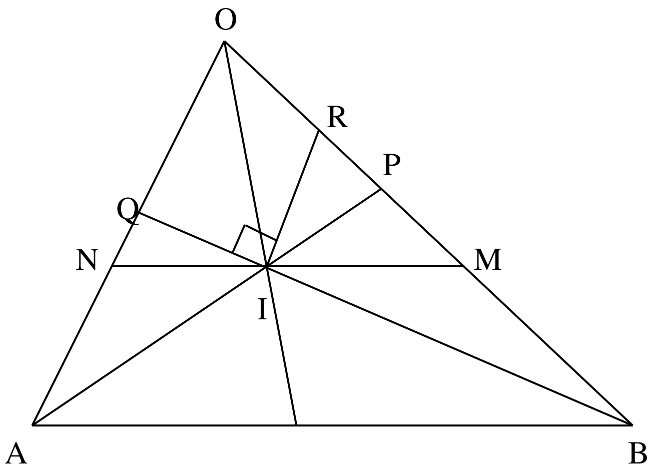
$$x=-\frac{42\sqrt{11}}{55}$$

y 座標は

$$y=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{42\sqrt{11}}{55}\right)+\frac{\sqrt{11}}{11}=\frac{26\sqrt{11}}{55}$$

よって $\underline{\mathrm{Q}\left(-\frac{42\sqrt{11}}{55},\ \frac{26\sqrt{11}}{55}\right)}$

3



AP は∠OAB の二等分線であるから

$\mathrm{OP} : \mathrm{BP} = \mathrm{AO} : \mathrm{AB} = 9 : 13$

なので

$\mathrm{OP} = \dfrac{9}{22}\mathrm{OB} = \dfrac{9}{22}\cdot 11 = \dfrac{9}{2}$

OI は∠AOP の二等分線であるから

$\mathrm{AI} : \mathrm{IP} = \mathrm{OA} : \mathrm{OP}$

$= 9 : \dfrac{9}{2}$

$= \underline{2 : 1}$ … $\boxed{（ア）}$

よって

$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2+1}$

$= \dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + 2\cdot\dfrac{9}{22}\vec{b}\right)$

$= \underline{\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{3}{11}\vec{b}}$ … $\boxed{（イ）}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = k\vec{b}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{IR}} = -\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = -\left(\dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{3}{11}\vec{b}\right) + k\vec{b} = -\dfrac{1}{3}\vec{a} + \left(k - \dfrac{3}{11}\right)\vec{b}$

また，BQ は∠OBA の二等分線であるから

$\mathrm{OQ} : \mathrm{QA} = \mathrm{OB} : \mathrm{AB} = 11 : 13$

なので

$\overrightarrow{\mathrm{QB}} = -\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\dfrac{11}{24}\vec{a} + \vec{b}$

よって，$\mathrm{BQ} \perp \mathrm{IR}$　であるとき

$\overrightarrow{\mathrm{IR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QB}} = 0$

$\left\{-\dfrac{1}{3}\vec{a} + \left(k - \dfrac{3}{11}\right)\vec{b}\right\}\cdot\left(-\dfrac{11}{24}\vec{a} + \vec{b}\right) = 0$

$\dfrac{11}{72}\left|\vec{a}\right|^2 + \left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{11}{24}k + \dfrac{1}{8}\right)\vec{a}\cdot\vec{b} + \left(k - \dfrac{3}{11}\right)\left|\vec{b}\right|^2 = 0$ … ①

ここで

$\mathrm{AB} = \left|-\vec{a} + \vec{b}\right| = 13$

より

$$\left|-\vec{a}+\vec{b}\right|^2=13^2$$

$$\left|\vec{a}\right|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=169$$

$$81-2\vec{a}\cdot\vec{b}+121=169$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{33}{2}$$

であるから①は

$$\frac{11}{72}\cdot 9^2+\left(-\frac{1}{3}-\frac{11}{24}k+\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{33}{2}+\left(k-\frac{3}{11}\right)\cdot 11^2=0$$

$$\frac{1}{8}\cdot 9+\left(-\frac{5}{24}-\frac{11}{24}k\right)\cdot\frac{3}{2}+\left(k-\frac{3}{11}\right)\cdot 11=0$$

$$\frac{9}{8}-\frac{5+11k}{16}+11k-3=0$$

$$18-5-11k+176k-48=0$$

$$165k=35$$

$$k=\frac{7}{33}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{7}{33}\vec{b}$$

よって

$\mathrm{OR}:\mathrm{RB}=7:26$

M は RM の中点であるから

$\mathrm{OR}:\mathrm{RM}:\mathrm{MB}=7:13:13$ … ②

よって

$$\mathrm{BM}=\frac{13}{33}\mathrm{OB}=\frac{13}{33}\cdot 11=\underline{\frac{13}{3}}\quad\cdots\ \boxed{（ウ）}$$

②より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{20}{33}\vec{b}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{MI}}=-\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OI}}=-\frac{20}{33}\vec{b}+\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{11}\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

よって

MI // BA であり， M , I , N は同一直線上の点より

MN // BA なので △OAB ∽ △ONM であるから

$\mathrm{ON}:\mathrm{NA}=\mathrm{OM}:\mathrm{MB}=20:13$

より

$$\mathrm{AN}=\frac{13}{33}\mathrm{OA}=\frac{13}{33}\cdot 9=\underline{\frac{39}{11}}\ \cdots\ \boxed{\text{（エ）}}$$

であり，

$$\begin{aligned}\mathrm{ON}+\mathrm{NM}+\mathrm{MO}&=\frac{20}{33}(\mathrm{OA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BO})\\&=\frac{20}{33}(9+13+11)\\&=\underline{20}\ \cdots\ \boxed{\text{（オ）}}\end{aligned}$$

4

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ （$0\leqq x, y$）$\cdots$ ①

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dx}\cdot 1$$

$$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

であるから，$y\neq 0$ において

$$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}=\underline{-\sqrt{\frac{y}{x}}}\quad\cdots ②$$

①より

$$\sqrt{y}=1-\sqrt{x}\quad\cdots ①'$$

なので②から

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$

よって

$$\lim_{x\to+0}\frac{dy}{dx}=\underline{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{dy}{dx}=\underline{0}$$

(2) 線分 AB 上の A からの距離が t の座標を P とする．

このとき，$\mathrm{AP}=t$，$\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{4}$ より

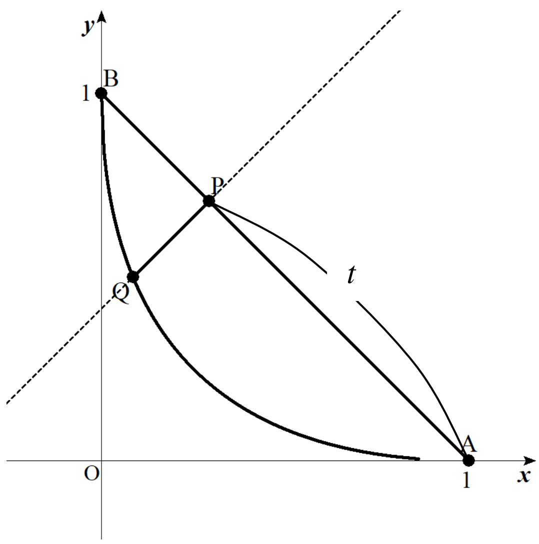
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\begin{pmatrix}\cos\frac{3}{4}\pi\\ \sin\frac{3}{4}\pi\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}t\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$$

であるから

$$\mathrm{P}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$$



この P を通り，線分 AB と垂直な直線を l とし，l と C の交点を Q とする．
このとき，l の方程式は

$$y=1\cdot\left\{x-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\right\}+\frac{\sqrt{2}}{2}t=x-1+\sqrt{2}t \quad \cdots ③$$

である．
ここで①’の両辺を 2 乗すると

$$\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$$

$$y=1-2\sqrt{x}+x$$

であるから，これに③を代入して
$x-1+\sqrt{2}t=1-2\sqrt{x}+x$

$\sqrt{x}=\dfrac{2-\sqrt{2}t}{2}$

$0\leqq x$ なので

$$x=\left(\frac{2-\sqrt{2}t}{2}\right)^2$$

であるから，これが Q の x 座標より，求める x 座標は $\underline{\left(\dfrac{2-\sqrt{2}t}{2}\right)^2}$

(3) (2) より Q の y 座標は

$$y=\left(\frac{2-\sqrt{2}t}{2}\right)^2-1+\sqrt{2}t=\frac{2-2\sqrt{2}t+t^2}{2}-1+\sqrt{2}t=\frac{t^2}{2}$$

よって $\mathrm{Q}\left(\left(\dfrac{2-\sqrt{2}t}{2}\right)^2,\ \dfrac{t^2}{2}\right)$

P は線分 AB 上の点であり，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ なので
$0\leqq t\leqq\sqrt{2}$ $\cdots$ ④

線分 PQ は $\mathrm{Q}\left(\left(\dfrac{2-\sqrt{2}t}{2}\right)^2,\ \dfrac{t^2}{2}\right)$ と直線 $\mathrm{AB}: x+y-1=0$ の距離であるから

$$\mathrm{PQ}=\frac{\left|\left(\dfrac{2-\sqrt{2}t}{2}\right)^2+\dfrac{t^2}{2}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{2-2\sqrt{2}t+t^2}{2}+\frac{t^2}{2}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|t^2-\sqrt{2}t\right| \quad \cdots ⑤$$

よって求める立体の体積は④, ⑤より

$$\int_0^{\sqrt{2}} \pi \cdot \mathrm{PH}^2 dt = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^4 - 2\sqrt{2}t^3 + 2t^2}{2} dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{\sqrt{2}}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{5}\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}}{15}\pi}$$

総 評

1

(1)は隣り合う確率の基本問題.
(2)は前半が二次関数の最大最小からの係数特定，後半は解の配置問題であるが，計算量が多く時間のロスをした受験生もいるのではないだろうか.
(3)は誘導付きの3項間漸化式の問題であるが，特性方程式を使い,公式に当てはめるタイプしか解いたことがない受験生には難しい問題であろう．問題に「$a_{n+1}-a_n$ を n を用いて表すと…」とあるので，$a_{n+2}-a_{n+1}$ と $a_{n+1}-a_n$ の関係式に変形できると気付けたかが分かれ道であろう.

2

楕円上の動点と直線上の動点の最短距離問題で，入試問題としても比較的よく出題される問題である.このタイプの問題をきちんと勉強したことがある受験生であればそこまで困ることなく解けた問題であろう.

(1)は，解答では $y=2x+k$ とおいて始めているが，接点の座標を (x_1, y_1) として，楕円の接線公式を用いて始めてもよい.

3

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求めるあたりまではそこまで詰まることなく進めた受験生が多いと思うが，その先のBMの計算や，Nがどのような位置にある点かを調べるあたりから計算がとんでもない式になったり，そもそもどうやって解けばよいか分からなくなった受験生が多そうな問題であるが，同一直線上の3点であればその2点を結ぶベクトルを調べ，定数倍になる条件を求める(今回は $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ を調べた時点でMIがBAと平行と分かるため，もっと楽)といった，基本ができていれば答えに行き着くことも難しくはない問題であるが差のついた問題というか，この問題に足止めされた受験生が多そうな問題である.

4

斜め回転体の体積問題で，誘導もそこそこされているため，このタイプの問題の中ではそこまで複雑な問題ではない．しかし，解き方がきちんと頭に入っていない受験生も多く．PQの長さを求めさせる誘導がないあたり，そこをきちんと分かっているかを出題者は見たいようである．好き嫌いせずまんべんなく受験対策ができていたかどうかで差がついた問題と言える.