― 東京理科大学 ―

2 月 4 日　B 方式　数学

解 答・解 説

1

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{7}\sin x+\dfrac{1}{7}\cos x+1 \\ g(x)=3^{-\frac{7}{2}x} \end{cases}$$

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{7}\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{7}\cos\dfrac{\pi}{3}+1=\dfrac{\sqrt{3}}{7}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{2}+1=\underline{\dfrac{9}{7}}$ … [ア,イ]

(2) $g(\log_3 5)=3^{-\frac{7}{2}\log_3 5}=3^{\log_3 5^{-\frac{7}{2}}}=5^{-\frac{7}{2}}=\dfrac{1}{125\sqrt{5}}=\underline{\dfrac{\sqrt{5}}{625}}$ … [ウ,エオカ]

(3) $t=f(x)$ とおくと

$$t=\frac{\sqrt{3}}{7}\sin x+\frac{1}{7}\cos x+1=\frac{2}{7}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1$$

であり，x はすべての実数なので

$$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$$

$$-\frac{2}{7}\leqq\frac{2}{7}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq\frac{2}{7}$$

$$\frac{5}{7}\leqq\frac{2}{7}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+1\leqq\frac{9}{7}$$ より

$$\frac{5}{7}\leqq t\leqq\frac{9}{7}\quad\cdots ①$$

$$(g\circ f)(x)=g\{f(x)\}=g(t)=3^{-\frac{7}{2}t}$$

であり，これは t の単調減少関数なので①より

$$g\left(\frac{9}{7}\right)\leqq(g\circ f)(x)\leqq g\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$3^{-\frac{9}{2}}\leqq(g\circ f)(x)\leqq 3^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{1}{81\sqrt{3}} \leqq (g \circ f)(x) \leqq \frac{1}{9\sqrt{3}}$$

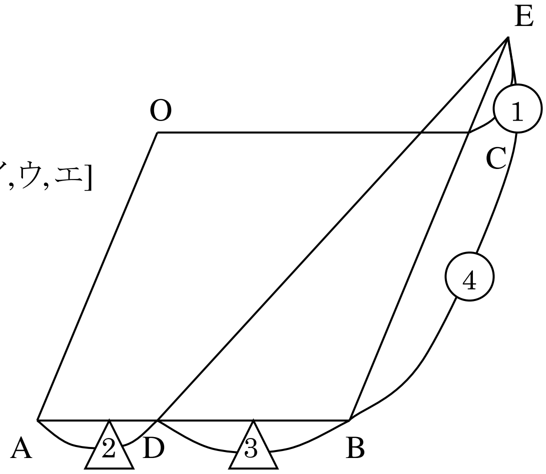
$$\underline{\frac{\sqrt{3}}{243}} \leqq (g \circ f)(x) \leqq \underline{\frac{\sqrt{3}}{27}} \quad \cdots \ \text{[キ,クケコ,サ,シス]}$$

2

(1) $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BE}$

$=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BC}$

$=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OC}$ … [ア,イ,ウ,エ]



(2) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OE}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$

であり,

F は OB 上の点であるから, k を実数の定数として

$\overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OC}$ … ①

と表すことができる.

また, F は DE の内分点でもあるから, s を $0<s<1$ の実数として

$$\overrightarrow{OF}=s\overrightarrow{OD}+(1-s)\overrightarrow{OE}=s\left(\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}\right)+(1-s)\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}s\right)\overrightarrow{OA}+\left(1-\frac{3}{5}s\right)\overrightarrow{OC} \quad \cdots ②$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから, ①, ②の係数を比較して

$$\begin{cases} k=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3}s \\ k=1-\dfrac{3}{5}s \end{cases}$$

これを解くと $s=\dfrac{20}{29}$, $k=\dfrac{17}{29}$ であるから, ①より

$\overrightarrow{OF}=\dfrac{17}{29}\overrightarrow{OA}+\dfrac{17}{29}\overrightarrow{OC}$ … [オカ,キク,ケコ,サシ]

(3) $DE\perp OB$ のとき, (1) より

$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$$\left(-\frac{4}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=0$$

$$-\frac{4}{3}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-\frac{11}{15}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\frac{3}{5}\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=0$$

$$-20\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-11\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\cos\theta+9\cdot 2^2=0$$

$$\cos\theta=-\frac{12}{11\sqrt{3}}=\underline{-\frac{4}{11}\sqrt{3}}\ \cdots\ [ス,セソ,タ]$$

3

$$a_n=\frac{1}{n^4}\int_1^{e^n}\frac{(\log x)^3}{x}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+3}dx$$

(1)　$a_1=\int_1^e(\log x)^3\frac{(1-\log x)^4}{x}dx$

$$=\int_1^e(\log x)^3\left\{-\frac{1}{5}(1-\log x)^5\right\}'dx$$

$$=\left[-\frac{1}{5}(\log x)^3\cdot(1-\log x)^5\right]_1^e-\int_1^e 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\left\{-\frac{1}{5}(1-\log x)^5\right\}dx$$

$$=\frac{3}{5}\int_1^e(\log x)^2\cdot\frac{(1-\log x)^5}{x}dx$$

$$=\frac{3}{5}\int_1^e(\log x)^2\left\{-\frac{1}{6}(1-\log x)^6\right\}'dx$$

$$=\frac{3}{5}\left\langle\left[-\frac{1}{6}(\log x)^3\cdot(1-\log x)^6\right]_1^e-\int_1^e 2\log x\cdot\frac{1}{x}\cdot\left\{-\frac{1}{6}(1-\log x)^6\right\}dx\right\rangle$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\int_1^e(\log x)\cdot\frac{(1-\log x)^6}{x}dx$$

以下，同様に計算していくと

$$a_1=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{7}\int_1^e\frac{(1-\log x)^7}{x}dx$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{7}\left[-\frac{1}{8}(1-\log x)^8\right]_1^e$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\underline{\frac{1}{280}}\quad\cdots\ [ア,イウエ]$$

(2) $a_n=\dfrac{1}{n^4}\displaystyle\int_1^{e^n}\dfrac{(\log x)^3}{x}\left(1-\dfrac{\log x}{n}\right)^{n+3}dx$

$$=\frac{1}{n^4}\int_1^{e^n}(\log x)^3\cdot\frac{1}{x}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+3}dx$$

$$=\frac{1}{n^4}\int_1^{e^n}(\log x)^3\left\{-\frac{n}{n+4}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+4}\right\}'dx$$

$$=\frac{1}{n^4}\left\langle\left[-\frac{n}{n+4}(\log x)^3\cdot\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+4}\right]_1^{e^n}-\int_1^{e^n}3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\left\{-\frac{n}{n+4}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+4}\right\}dx\right\rangle$$

$$=\frac{3}{n^3(n+4)}\int_1^{e^n}(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+4}dx$$

$$=\frac{3}{n^3(n+4)}\int_1^{e^n}(\log x)^2\left\{-\frac{n}{n+5}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+5}\right\}'dx$$

$$=\frac{1}{n^3(n+4)}\left\langle\left[-\frac{n}{n+5}(\log x)^2\cdot\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+5}\right]_1^{e^n}-\int_1^{e^n}2(\log x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\left\{-\frac{n}{n+5}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+5}\right\}dx\right\rangle$$

$$=\frac{3\cdot2}{n^2(n+4)(n+5)}\int_1^{e^n}(\log x)\cdot\frac{1}{x}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+5}dx$$

以下，同様に計算していくと

$$a_n=\frac{3\cdot2\cdot1}{n(n+4)(n+5)(n+6)}\int_1^{e^n}\frac{1}{x}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+6}dx$$

$$=\frac{3\cdot2\cdot1}{n(n+4)(n+5)(n+6)}\left[-\frac{n}{n+7}\left(1-\frac{\log x}{n}\right)^{n+7}\right]_1^{e^n}$$

$$=\frac{6}{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}$$

$$=\frac{6}{\{(n+4)(n+7)\}\{(n+5)(n+6)\}}$$

$$=\frac{6}{\{(n^2+11n)+28\}\{(n^2+11n)+30\}}$$

$$=3\left\{\frac{1}{(n^2+11n)+28}-\frac{1}{(n^2+11n)+30}\right\}$$

$$=\frac{3}{(n+4)(n+7)}-\frac{3}{(n+5)(n+6)}$$

$$=\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+7}\right)-3\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right) \quad \cdots ②$$

$$=\frac{1}{n+4}-\frac{3}{n+5}+\frac{3}{n+6}-\frac{1}{n+7} \quad \cdots ③$$

よって $\{a_n\}$の一般項は①，③より

$$a_n=\underline{\frac{1}{n+4}-\frac{3}{n+5}+\frac{3}{n+6}-\frac{1}{n+7}} \quad \cdots \text{[オ,カ,キ,ク,ケ,コ]}$$

$$=\underline{\frac{6}{(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}} \quad \cdots \text{[サ]}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+7}\right)=\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)$$

$$\vdots$$

$$+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+5}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+6}\right)+\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+7}\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\left(\frac{1}{n+5}+\frac{1}{n+6}+\frac{1}{n+7}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+6}$$

であるから，②より

$$\sum_{k=1}^{n}a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+7}\right)-3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\left(\frac{1}{n+5}+\frac{1}{n+6}+\frac{1}{n+7}\right)-3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+6}\right)$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_n=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{105}} \quad \cdots \text{[シ,スセソ]}$$

4

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+3^2}=\underline{\sqrt{34}}$ $\cdots$ [アイ]

(2)　$|z-1|=3$ より，点 $\mathrm{P}(z)$ は，複素数平面上での中心1，半径3の円 C 上の点である.

ここで，xy 平面に直して考えると，直線 AB の方程式は

$$y=\frac{0-3}{3-(-2)}(x-3)=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}\quad\cdots\ ①$$

円 C の方程式は

$$(x-1)^2+y^2=9$$

であるから，A，B，P が一直線上にあるときの P の x 座標は

$$(x-1)^2+\left(-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}\right)^2=9$$

$$x^2-2x+1+\frac{9}{25}x^2-\frac{54}{25}x+\frac{81}{25}=9$$
$$25x^2-50x+25+9x^2-54x+81=225$$
$$34x^2-104x-119=0$$
$$x=\frac{52\pm\sqrt{52^2+34\cdot 119}}{34}=\frac{26}{17}\pm\frac{\sqrt{6750}}{34}=\frac{26}{17}\pm\frac{\sqrt{2\cdot 3^3\cdot 5^3}}{34}=\frac{26}{17}\pm\frac{15}{34}\sqrt{30}$$

であり，①より

$$y=-\frac{3}{5}\left(\frac{26}{17}\pm\frac{15}{34}\sqrt{30}\right)+\frac{9}{5}=\frac{15}{17}\mp\frac{9}{34}\sqrt{30}$$

よって

$$z=\underline{\frac{26}{17}\pm\frac{15}{34}\sqrt{30}+\left(\frac{15}{17}\mp\frac{9}{34}\sqrt{30}\right)i}\quad\text{（複合同順）}\ \cdots\ [\text{ウ～ナ}]$$

(3)　(2) より

$$\mathrm{AB}: y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}\quad\text{すなわち}\quad \mathrm{AB}: 3x+5y-9=0$$

であるから，AB と平行な直線を l とすると

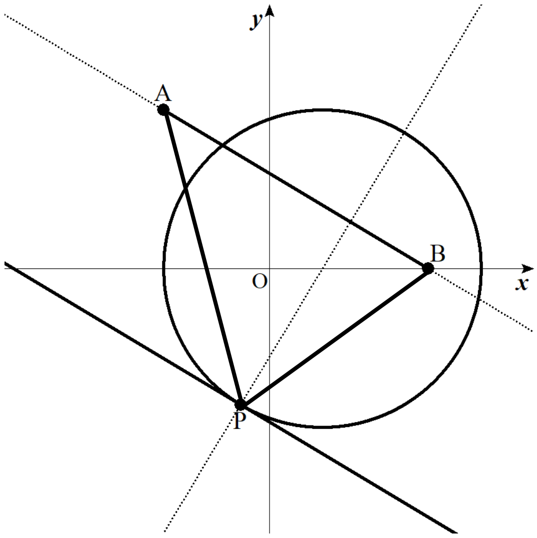
$$l: 3x+5y+k=0$$

とおくことができる.

△ABP の面積が最大となるような点 P

は右図のように，C と l が第3象限で接

するときの接点となるときである．
このとき，P は，AB と垂直で，$(1,0)$
を通る直線と C の交点である．
そのような直線の方程式は，①から



$$y=\frac{5}{3}(x-1)=\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}\quad\cdots ②$$

なので，この直線と C の交点の x 座標は

$$(x-1)^2+\left(\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}\right)^2=9$$

$$x^2-2x+1+\frac{25}{9}x^2-\frac{50}{9}x+\frac{25}{9}=9$$

$$9x^2-18x+9+25x^2-50x+25=81$$

$$34x^2-68x-47=0$$

$$x=\frac{34\pm\sqrt{34^2-34\cdot(-47)}}{34}=1\pm\frac{\sqrt{34\cdot 81}}{34}=1\pm\frac{9}{34}\sqrt{34}$$

このうち第3象限の x 座標は $x=1-\frac{9}{34}\sqrt{34}$

②より，y 座標は

$$y=\frac{5}{3}\left(1-\frac{9}{34}\sqrt{34}\right)-\frac{5}{3}=-\frac{15}{34}\sqrt{34}$$

よって，$\mathrm{P}\left(1-\frac{9}{34}\sqrt{34},\ -\frac{15}{34}\sqrt{34}\right)$

△ABP の底辺を AB とみたときの高さを h とする．このとき，h は点 P と直線
$\mathrm{AB}:3x+5y-9=0$ の距離に等しいので

$$h=\frac{\left|3\cdot\left(1-\frac{9}{34}\sqrt{34}\right)+5\cdot\left(-\frac{15}{34}\sqrt{34}\right)-9\right|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\frac{1}{\sqrt{34}}\left|-6-3\sqrt{34}\right|=\frac{1}{\sqrt{34}}\left(6+3\sqrt{34}\right)$$

(1) より $\mathrm{AB}=\sqrt{34}$
であるから

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\left(6+3\sqrt{34}\right)=3+\frac{3}{2}\sqrt{34}$$

以上から，△ABP の面積の最大値は $\underline{3+\frac{3}{2}\sqrt{34}}$ … [ニ,ヌ,ネ,ノハ]

そのとき $\underline{z=1-\frac{9}{34}\sqrt{34}-\frac{15}{34}\sqrt{34}i}$ … [ヒ～ヨ]

5

(1) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4x+29}$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-4x+29)-(x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+29)^2}=\underline{-\frac{x^2+6x-41}{(x^2-4x+29)^2}}$$

(2) $x^2-4x+29=(x-2)^2+25\neq 0$

であり，

$x^2+6x-41=0$

を解くと

$x=-3\pm 5\sqrt{2}$

であり，

$-3-5\sqrt{2}<-10$　であり，

・ $f(-10)=\dfrac{-10+3}{100+40+29}=-\dfrac{7}{169}$

・ $f(-3+5\sqrt{2})=\dfrac{(-3+5\sqrt{2})+3}{(-3+5\sqrt{2})^2-4(-3+5\sqrt{2})+29}=\dfrac{5\sqrt{2}}{100-50\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{10}$

・ $f(20)=\dfrac{20+3}{400-80+29}=\dfrac{23}{349}$

であるから，$-10\leqq x\leqq 20$　における増減は右図.

x	-10		$-3+5\sqrt{2}$		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{7}{169}$	↗	$\frac{\sqrt{2}+1}{10}$	↘	$\frac{23}{349}$

よって，$f(x)$ は

$\underline{x=-10\ \text{のとき，最小値}\ -\dfrac{7}{169},\quad x=-3+5\sqrt{2}\ \text{のとき，最大値}\ \dfrac{\sqrt{2}+1}{10}}$

をとる.

(3) $\begin{cases} y=f(x) \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases}$ の交点の x 座標は

$f(x)=\dfrac{1}{5}$

$\dfrac{x+3}{x^2-4x+29}=\dfrac{1}{5}$

$5x+15=x^2-4x+29$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

よって　$x=\underline{2,7}$

(4)　(2), (3) より　$2 \leqq x \leqq 7$　において，$f(x) \geqq \dfrac{1}{5}$　であるから，求める面積を S とおくと

$$S = \int_2^7 \left(\frac{x+3}{x^2-4x+29} - \frac{1}{5} \right) dx$$
$$= \int_2^7 \frac{x+3}{(x-2)^2+25} dx - \int_2^7 \frac{1}{5} dx$$
$$= \int_2^7 \frac{(x-2)+5}{(x-2)^2+25} dx - \frac{1}{5} [x]_2^7$$
$$= \frac{1}{2} \int_2^7 \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+25} dx + \int_2^7 \frac{5}{(x-2)^2+25} dx - 1 \quad \cdots \text{①}$$

ここで

・$\displaystyle\int_2^7 \frac{2(x-2)}{(x-2)^2+25} dx = \left[\log\{(x-2)^2+25\}\right]_2^7 = \log 50 - \log 25 = \log 2$

・$\displaystyle\int_2^7 \frac{5}{(x-2)^2+25} dx$　について

$x-2 = 5\tan\theta$　とおくと

$$dx = \frac{5}{\cos^2\theta} d\theta$$

x	2	$\to$	7
$\tan\theta$	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{4}$

であり，x と θ の対応は右のようになる．よって

$$\int_2^7 \frac{5}{(x-2)^2+25} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5}{25\tan^2\theta+25} \cdot \frac{5}{\cos^2\theta} d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 d\theta$$
$$= [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

よって①より

$$\underline{S = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - 1}$$

総 評

1

合成関数と三角関数の合成の基本的な問題．他の問題のレベルを考えるとこれは落とせない．

2

ベクトルの分点に関わる標準的な問題であるが，点 E が外分点であることに注意．ここで内分と見間違えて失点もしくは振り出しにもどる羽目になった受験生も少なからずいると思われる．

3

(1)は部分積分を数回してみることで，法則性が見抜ける．ただし，式を見ただけで辟易としたり，途中で計算ミスをした受験生が多くいたのではないか．(2)も(1)ができていれば「(1)同様に処理をしていけばできるのではないか？」と思って根気強く計算していけば解けるが，解答の順番が先に部分分数分解された形であることなど，受験生を迷わせる解答欄である．（それとも私の解法が正攻法でないのか？）

(2)まできちんと解ければ(3)は部分分数分解で表現される数列の和の極限であるから容易い．
今回の一番面倒でややこしい問題であったように感じる．

4

複素数平面と図形と方程式の問題．内容自体は難しいことを聞いてはいないが，計算が面倒であり，丁寧かつ上手に処理をしたかがカギとなる．こちらも，発想や解法というより，計算のややこしさで受験生を泣かせたように思われる．

5

(1)から(3)は簡単な計算問題．(2)は $-3-5\sqrt{2}<-10$ の大小などは気をつけねばならないが，計算も含めそこまで難しくない．(4)は分数型の定積分であるが，分母が因数分解できないため，部分分数分解でもなく，分子が分母の微分の定数倍でもないため log が出てくるタイプの積分でもなく，分母を平方完成してみると $(x-2)^2+5^2$ であることから，$x-2=5\tan\theta$ と置換積分するタイプであると気付けなくてはならない．また，それに合わせて分子を，積分して log にする部分と，前述の置換積分で計算する部分に分けなくてはならず，このタイプの問題に解きなれていないと，最後まで行き着けなかった受験生も多かったと思われ，(4)はかなり難しいといってよいであろう．