― 東京理科大学 ―

2月5日　B方式　数学

解答・解説

1

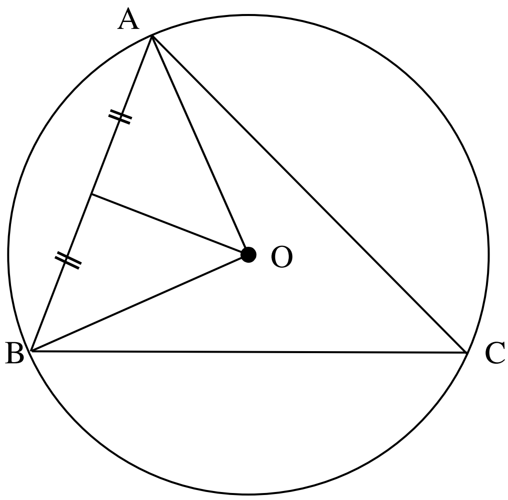
(1) (a) $\triangle$OAB は OA = OB の二等辺三角形であるから

$$\left|\overrightarrow{AO}\right|\cos\angle BAO=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$$

である．

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}&=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AO}\right|\\&=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\\&=\frac{1}{2}\cdot 3^2\\&=\underline{\frac{9}{2}}\quad\cdots\ [\text{ア},\text{イ}]\end{aligned}$$



(b) (a) 同様に考えて

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{1}{2}\cdot 5^2=\underline{\frac{25}{2}}\quad\cdots\ [\text{ウエ},\text{オ}]$$

(c) $\overrightarrow{AO}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ とする．

ここで

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=3\cdot5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{15\sqrt{2}}{2}$$

であり，(a), (b) より

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{9}{2}\\[2mm]\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{25}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{9}{2} \\ s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\dfrac{25}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9s+\dfrac{15}{2}\sqrt{2}t=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{15}{2}\sqrt{2}s+25t=\dfrac{25}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6s+5\sqrt{2}t=3 \\ 3\sqrt{2}s+10t=5 \end{cases}$$

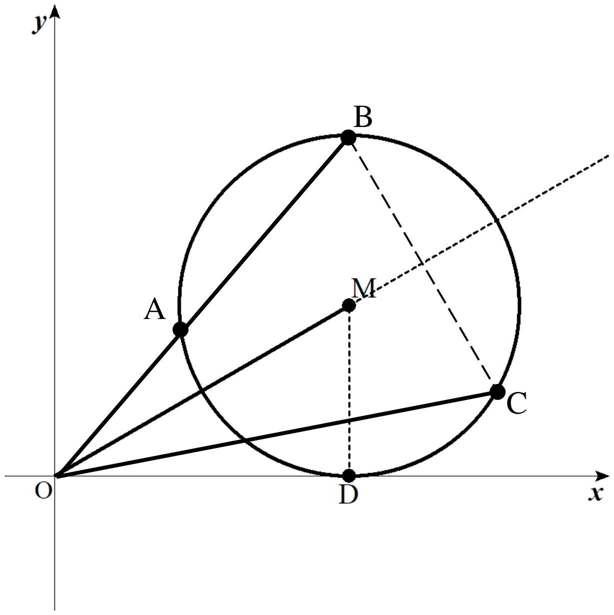
これを解いて

$s=1-\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$,　$t=1-\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\underline{\left(1-\frac{5\sqrt{2}}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\quad\cdots\ [カ\sim シ]$$

(2)　$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ とし，$\mathrm{D}(3)$ とする．

(a) 右図より



$$|\alpha|\cdot|\beta|=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$$

方べきの定理から

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\mathrm{OD}^2=3^2=9$$

であるから

$$|\alpha|\cdot|\beta|=\underline{9}\quad\cdots\ [\text{ス}]$$

(b) B は OA の延長上の点であり，図のように A よりも O と離れた点であるから

$$\beta=k\alpha\quad(0<k)$$

と表すことができる．

C は OM に関して B と対称な点より

$$\begin{cases}|\beta|=|\gamma|\ \cdots\ ① \\ \angle\mathrm{BOM}=\angle\mathrm{COM}\end{cases}$$

であり，また $\mathrm{M}(3,\sqrt{3})$ より

$$\angle\mathrm{MOD}=\frac{\pi}{6}$$

である．ここで

$$\arg\gamma=\angle\mathrm{COD}=\theta$$

とすると

$$\angle\mathrm{BOM}=\angle\mathrm{COM}=\frac{\pi}{6}-\theta$$

であるから，

$$\arg\alpha=\angle\mathrm{BOD}=\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{\pi}{3}-\theta\quad\cdots\ ②$$

よって，①, ②および(a)から

$$\alpha\gamma=|\alpha|\left\{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\}\cdot|\beta|\{\cos\theta+i\sin\theta\}$$

$$=|\alpha||\beta|\left\langle\cos\left\{\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\theta\right\}+i\sin\left\{\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+\theta\right\}\right\rangle$$

$$=\underline{9\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}\quad\cdots\ [\text{セ,ソ,タ}]$$

(c) $A'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ とする．(b)の結果から

$$\frac{1}{\alpha\gamma}=\frac{1}{9}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{\alpha}=\gamma\cdot\frac{1}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}\ \cdots\ ③$$

ここで，$C(\gamma)$ も A 同様に M を中心とした半径 $\sqrt{3}$ の円周上の点であり，③は A' が

C を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転させ，原点からの距離を $\dfrac{1}{9}$ に縮めた点の集合であること

を指す．よって A' の軌跡は円となり，その中心は

$$\left(3+\sqrt{3}\right)\frac{1}{9}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\frac{1}{9}\left(3+\sqrt{3}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{1}{9}\left(3-\sqrt{3}i\right)$$

$$=\underline{\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}i}\ \cdots\ [チ,ツ,テ,ト]$$

半径は $\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}$ … [ナ,ニ]

(3)　$x^2 f(x)=3x^5+2x^4+x^3+2\int_0^x g(t)dt$ $\cdots$ ①

$g(x)=xf(x)+4x^3+x^2\int_{-1}^1 g(t)dt$ $\cdots$ ②

$f(-1)=g(-1)$ $\cdots$ ③

①の両辺を x に関して微分すると

$2xf(x)+x^2 f'(x)=15x^4+8x^3+3x^2+2g(x)$ $\cdots$ ④

であり，$\int_{-1}^1 g(t)dt$ は定数より

$a=\int_{-1}^1 g(t)dt$ $\cdots$ ⑤

とおくと，このとき②は

$g(x)=xf(x)+4x^3+ax^2$ $\cdots$ ②’

となり，これを④へ代入して

$2xf(x)+x^2 f'(x)=15x^4+8x^3+3x^2+2\{xf(x)+4x^3+ax^2\}$

$x^2 f'(x)=15x^4+16x^3+(3+2a)x^2$

$f'(x)=15x^2+16x+3+2a$

であるから，k を定数とすると

$f(x)=5x^3+8x^2+(3+2a)x+k$ $\cdots$ ⑥

⑤と②’へ代入すると

$g(x)=x\{5x^3+8x^2+(3+2a)x+k\}+4x^3+ax^2$

$\quad=5x^4+12x^3+3(1+a)x^2+kx$ $\cdots$ ⑦

これと⑤より

$a=\int_{-1}^1 \{5t^4+12t^3+3(1+a)t^2+kt\}dt$

$\quad=2\int_0^1 \{5t^4+3(1+a)t^2\}dt$

$\quad=2\left[t^5+(1+a)t^3\right]_0^1$

$\quad=2(2+a)$

よって

$a=-4$

これを⑥,⑦へ代入して

$f(x)=5x^3+8x^2-5x+k$ $\cdots$ ⑥’

$g(x)=5x^4+12x^3-9x^2+kx$ $\cdots$ ⑦’

③，⑥’，⑦’より

$5\cdot(-1)^3+8\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+k=5\cdot(-1)^4+12\cdot(-1)^3-9\cdot(-1)^2+k\cdot(-1)$

$-5+8+5+k=5-12-9-k$

$k=-12$

よって⑥’，⑦’より

$\underline{f(x)=5x^3+8x^2-5x-12}$

$\underline{g(x)=5x^4+12x^3-9x^2-12x}$

2

(1) $n=2$ のとき，S 型タイル1枚の並べ方であるから $\underline{a_2=3}$

$n=3$ のとき，L 型タイル1枚の並べ方であるから $\underline{a_3=2}$

(2) 縦の長さが1，横の長さが$n+3$の壁に左から順にタイルを敷き詰めるとき，
左から距離nのところまでタイルを敷き詰めているとき，残りはL型タイル1枚を並べればよく，左から距離$n+1$のところまでタイルを敷き詰めているとき，残りはS型タイル1枚を並べればよい.
よって

$$a_{n+3}=a_n\cdot 2+a_{n+1}\cdot 3=\underline{3a_{n+1}+2a_n}$$

(3) $b_n=a_n+a_{n+1}$ のとき
$b_{n+2}=a_{n+2}+a_{n+3}$
(2) より

$$b_{n+2}=a_{n+2}+3a_{n+1}+2a_n=a_{n+2}+a_{n+1}+2(a_{n+1}+a_n)=\underline{b_{n+1}+2b_n}$$

(4) $c_n=b_{n+1}-qb_n$ $\cdots$ ①
としたとき
$c_{n+1}=b_{n+2}-qb_{n+1}$
(3) より
$c_{n+1}=b_{n+1}+2b_n-qb_{n+1}=(1-q)b_{n+1}+2b_n$ $\cdots$ ②
なので，$\{c_n\}$が等比数列であるとき，公比をrとすると，
$c_{n+1}=rc_n$
①, ②より
$(1-q)b_{n+1}+2b_n=rb_{n+1}-qrb_n$
であるから

$$\begin{cases}1-q=r & \cdots ③\\ 2=-qr & \cdots ④\end{cases}$$

③を④へ代入して
$2=-q(1-q)$
$q^2-q-2=0$
$(q+1)(q-2)=0$
$q=-1,2$
③より，
$q=-1$ のとき $r=2$，$q=2$ のとき $r=-1$
以上から，$\{c_n\}$が等比数列となるのは

$$\begin{cases} \cdot\ q=-1 \text{ のとき，公比} 2 \\ \cdot\ q=2 \text{ のとき，公比} -1 \end{cases}$$

(5)　(4)より$\{c_n\}$は

（ｉ）$q=-1$　のとき

$$\begin{cases} c_n = b_{n+1}+b_n \\ c_{n+1}=2c_n \end{cases}$$

となり，$a_1=0$　であるから

$c_1=b_2+b_1=a_2+a_3+a_1+a_2=2a_2+a_3=2\cdot 3+2=8$

より

$$c_n=8\cdot 2^{n-1}$$

$$b_{n+1}+b_n=2^{n+2} \quad \cdots ⑤$$

（ⅱ）$q=2$　のとき

$$\begin{cases} c_n = b_{n+1}-2b_n \\ c_{n+1}=-c_n \end{cases}$$

となり，

$c_1=b_2-2b_1=a_2+a_3-2(a_1+a_2)=-a_2+a_3=-3+2=-1$

より

$$c_n=(-1)\cdot(-1)^{n-1}$$

$$b_{n+1}-2b_n=(-1)^n \quad \cdots ⑥$$

⑤－⑥より

$$3b_n=2^{n+2}-(-1)^n$$

$$b_n=\frac{2^{n+2}-(-1)^n}{3}$$

(6)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_n$　とし，mを自然数とする．

（ｉ）$n=2m$　のとき

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2m-1}+a_{2m} \\ &= (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2m-1}+a_{2m}) \\ &= b_1+b_3+\cdots+b_{2m-1} \end{aligned}$$

このとき(5)より

$$B_m=b_{2m-1}=\frac{2^{2m+1}-(-1)^{2m-1}}{3}=\frac{1}{3}\left(8\cdot4^{m-1}+1\right)\ \text{とすると}$$

$$S_n=\sum_{l=1}^{m}B_l=\frac{1}{3}\left(8\cdot\frac{4^m-1}{4-1}+m\right)=\frac{8}{9}\cdot4^m+\frac{1}{3}m-\frac{8}{9}$$

$n=2m$　すなわち　$m=\frac{1}{2}n$　より

$$S_n=\frac{8}{9}\cdot4^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{2}-\frac{8}{9}=\frac{2^{n+3}}{9}+\frac{n}{6}-\frac{8}{9}$$

(ⅱ) $n=2m-1$　のとき

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2m-2}+a_{2m-1}\\&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2m-2}+a_{2m-1})\\&=b_2+b_4+\cdots+b_{2m-2}\end{aligned}$$

このとき(5)より

$$B_m=b_{2m}=\frac{2^{2m+2}-(-1)^{2m}}{3}=\frac{1}{3}\left(16\cdot4^{m-1}-1\right)\ \text{とすると}$$

$$S_n=\sum_{l=1}^{m-1}B_l=\frac{1}{3}\left\{16\cdot\frac{4^{m-1}-1}{4-1}-(m-1)\right\}=\frac{4}{9}\cdot4^m-\frac{1}{3}m-\frac{13}{9}$$

$n=2m-1$　すなわち　$m=\frac{1}{2}(n+1)$　より

$$S_n=\frac{4}{9}\cdot4^{\frac{1}{2}(n+1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(n+1)-\frac{13}{9}=\frac{2^{n+3}}{9}-\frac{1}{6}(n+1)-\frac{13}{9}=\frac{2^{n+3}}{9}-\frac{n}{6}-\frac{29}{18}$$

以上から

$$\sum_{k=1}^{n}a_n=\begin{cases}\dfrac{2^{n+3}}{9}+\dfrac{n}{6}-\dfrac{8}{9} & (n=2m)\\[2mm] \dfrac{2^{n+3}}{9}-\dfrac{n}{6}-\dfrac{29}{18} & (n=2m-1)\end{cases}\quad(m\text{ は自然数})$$

(7)　(6)より

(ⅰ) $n=2m$　のとき

$$S_n=S_{2m}=\frac{8}{9}\cdot4^m+\frac{1}{3}m-\frac{8}{9}$$

$$S_{n-1}=S_{2m-1}=\frac{4}{9}\cdot4^m-\frac{1}{3}m-\frac{13}{9}$$

であるから

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{4}{9}\cdot 4^m + \frac{2}{3}m + \frac{5}{9}$$

$n = 2m$　すなわち　$m = \dfrac{n}{2}$　より

$$a_n = \frac{4}{9}\cdot 4^{\frac{n}{2}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{n}{2} + \frac{5}{9} = \frac{4}{9}\cdot 2^n + \frac{1}{3}n + \frac{5}{9}$$

（ⅱ）$n = 2m-1$　$(2 \leqq m)$のとき

$$S_n = S_{2m-1} = \frac{4}{9}\cdot 4^m - \frac{1}{3}m - \frac{13}{9}$$

$$S_n = S_{2m-2} = S_{2(m-1)} = \frac{8}{9}\cdot 4^{m-1} + \frac{1}{3}(m-1) - \frac{8}{9}$$

$$= \frac{2}{9}\cdot 4^m + \frac{1}{3}m - \frac{11}{9}$$

であるから

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{9}\cdot 4^m - \frac{2}{3}m - \frac{2}{9}$$

$n = 2m-1$　すなわち　$m = \dfrac{1}{2}(n+1)$　より

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2}{9}\cdot 4^{\frac{1}{2}(n+1)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(n+1) - \frac{2}{9} = \frac{4}{9}\cdot 2^n - \frac{1}{3}n - \frac{5}{9}$$

これは　$a_1 = 0$　も満たしている．

以上，（ⅰ)，(ⅱ)から

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{4}{9}\cdot 2^n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{5}{9} & (n = 2m) \\ \dfrac{4}{9}\cdot 2^n - \dfrac{1}{3}n - \dfrac{5}{9} & (n = 2m-1) \end{cases}$$　（m は自然数）

3

(1)　$f(x)=xe^x-e^x-x-1$

(a)　$f(a)=ae^a-e^a-a-1=0$

であるとき

$$f(-a)=-ae^{-a}-e^{-a}+a-1=e^{-a}\left(-a-1+ae^a-e^a\right)$$
$$=e^{-a}\cdot f(a)$$
$$=e^{-a}\cdot 0$$
$$=\underline{0}$$

(b)　$f'(x)=e^x+xe^x-e^x-1=xe^x-1$

$0<x$ のとき，xe^x は単調に増加し，

$\begin{cases}0\cdot e^0=0\\ 1\cdot e^1=e>1\end{cases}$ より，$0<x<1$ の範囲に $xe^x-1=0$ を満たす α がただ一つ存在する．また，

$f(0)=-1<0$

$f(2)=e^2-3>0$

であることから，右の増減表より，

$f(x)=0$ を満たす正の実数解は <u>1 個</u>

x	0		α		2	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-1	↘	負	↗	正	

(2)　$f(x)=e^x$，$g(x)=\log x$ とする．

(a)　$\begin{cases}f'(x)=e^x\\ g'(x)=\dfrac{1}{x}\end{cases}$ より，

$$f'(a)=g'(b)$$
$$e^a=\frac{1}{b}$$
$$\underline{b=\frac{1}{e^a}}$$

(b)　$f(x)$ と $g(x)$ は互いに逆関数であるから，C_1 と C_2 は直線 $y=x$ に関して対称である．

よって，l_1 と l_2 も $y=x$ に関して対称であるから，

$m_1=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$ とおくと，$m_2=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$ より

$$m_1m_1=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}\cdot\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}$$

$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\cdot\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

$$=\underline{1}$$

(c)　(b)同様，C_1 と C_2，l_1 と l_2 がそれぞれ $y=x$ に関して対称であるから，

$S_1=S_2$ なので

$\frac{S_1}{S_2}=\underline{1}$

総 評

1

(1)は三角形の外心の位置ベクトルを求める問題．内心の位置ベクトルは比較的良く知られているが，外心はそこそこ出題される割に求められない受験生が多い．(1)では(a)，(b)の誘導があるおかげで求められた受験生もそこそこいるのではないかと思うが，(a)～(c)までの流れは覚えておくべき知識である．

(2)は複素数平面と平面図形の融合問題．問われているものの意味をよく考えないと(a)から解けなかった受験生もいたであろう．複素数平面やベクトルの問題は，扱う図形の特性上，その分野にとどまらず三角関数や平面図形などの知識も融合させた問題が出題されやすいので幅広い視野を持って考えるようにしたい．

(3)は定積分を含む関数問題．定積分の上端か下端に変数（x）を含むタイプと，定積分の上端下端ともに定数であるタイプそれぞれの問題は解いたことがある受験生も多いであろうが，今回はその両方を同時に扱う問題で，何をすればよいのか，与えられた式をどう使えば良いのかさえ分からなかった受験生もいたのではないかと思う．

2

小問が多く，(5)までは何とか得点したい．(6)と(7)はnの偶奇で場合分けをして解いているが，そもそも(6)を解くために(5)で求めたb_nをどう利用するか思いつけなかった受験生もいるのではないだろうか，また，思いついても，そのあとの細かい計算などで失点した者も多いのではないかと思う．

3

(1)はきちんと得点したい．特に(b)は何となくで済ませず，$0<x$ において$f(x)$が一旦減少して，その後単調増加をして，少なくとも $0<f(x)$ となるというところまで書かねば，増減を根拠とするには不十分であろう．
(関数的にあり得ないが，単調増加のグラフでも漸近線があり，$0<f(x)$ とならないタイプもある為.)
(2)は逆関数であることに気が付ければ今回の試験の中では比較的優しく，得点したい問題．

全体を通してみると，1 の(2) (3)や 2 など，前半に難しい問題や複雑な問題が出題されており，時間と分量などを考えると全体的な得点率は低いと思われる．