― 東京理科大学 ―

2 月 6 日　B 方式　数学

解 答・解 説

1

(1) $\begin{cases} x = 1+\cos t \\ y = -1+2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ より

$\begin{cases} \cos t = x-1 \\ \sin t = \dfrac{y+1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

であるから

$\cos^2 t+\sin^2 t = 1$

$$(x-1)^2+\left(\frac{y+1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

$$(x-1)^2+\frac{(y+1)^2}{8} = 1 \quad \cdots \text{①} \quad \cdots \text{[ア,イ,ウ]}$$

$y = x+k \quad \cdots$ ②

として，C と②が接するとき，これを①に代入して

$$(x-1)^2+\frac{(x+k+1)^2}{8} = 1$$

$$8(x-1)^2+(x+k+1)^2 = 8$$

$$9x^2+2(k-7)x+k^2+2k+1 = 0 \quad \cdots \text{③}$$

が重解をもてばよいので，③の判別式を D とすると

$D/4 = 0$ となる k であればよいので，

$$(k-7)^2-9(k^2+2k+1) = 0$$

$$-8k^2-32k+40 = 0$$

$$k^2+4k-5 = 0$$

$$(k+5)(k-1) = 0$$

$$k = -5, 1 \quad \cdots \text{[エ,オ]}$$

・$k=-5$ のとき③は

$$9x^2-24x+16=0$$

$$(3x-4)^2=0$$

$$x=\frac{4}{3}$$

②より

$$y=\frac{4}{3}-5=-\frac{11}{3}$$

よってこのときの接点は $\underline{\left(\frac{4}{3},-\frac{11}{3}\right)}$ … [カ,キ,クケ,コ]

・$k=1$ のとき③は

$$9x^2-12x+4=0$$

$$(3x-2)^2=0$$

$$x=\frac{2}{3}$$

②より

$$y=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

よってこのときの接点は $\underline{\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)}$ … [サ,シ,ス,セ]

(2) $f(x)=x^3+3ax^2+bx+1-a^2$

(a) $f(2)=2^3+3a\cdot 2^2+b\cdot 2+1-a^2$

$$=-a^2+12a+2b+9$$

$$=-(a-6)^2+(2b+45)$$

であるから，$f(2)=0$ となる (a,b) のうち，b が最小となるのは，$2b+45$ が最小となるときで，そのようになるのは，$a=6$ のときで，そのとき

$$2b+45=0$$

$$b=-\frac{45}{2}$$

よって

$$(a,b)=\underline{\left(6,-\frac{45}{2}\right)}$$ … [ソ,タチ,ツ]

このとき

$$f(x)=x^3+18x^2-\frac{45}{2}x-35$$

$x^2e^{|x|}$ は $x=0$ に関して対称であり，$0\leqq x\leqq 1$ において $|x|=x$ なので

$$\int_{-1}^{1}x^2e^{|x|}dx=\underline{2\int_0^1 x^2e^x dx}\ \cdots\ [テ]$$

$$=2\int_0^1 x^2\left(e^x\right)'dx$$

$$=2\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 2xe^x dx$$

$$=\underline{2e-4\int_0^1 xe^x dx}\ \cdots\ [ト,ナ]\ \cdots\ ①$$

ここで

$$\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x\left(e^x\right)'dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$$

より，これを①へ代入して

$$\int_{-1}^{1}x^2e^{|x|}dx=\underline{2e-4}\ \cdots\ [ニ,ヌ]$$

また，奇関数であることから

$$\int_{-1}^{1}x^3e^{|x|}dx=0,\quad \int_{-1}^{1}xe^{|x|}dx=0$$

最後に

$$\int_{-1}^{1}e^{|x|}dx=2\int_0^1 e^x dx=2\left[e^x\right]_0^1=2e-2$$

であるから

$$\int_{-1}^{1}f(x)e^{|x|}dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+18x^2-\frac{45}{2}x-35\right)e^{|x|}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}x^3e^{|x|}dx+18\int_{-1}^{1}x^2e^{|x|}dx-\frac{45}{2}\int_{-1}^{1}xe^{|x|}dx-35\int_{-1}^{1}e^{|x|}dx$$

$$=18(2e-4)-35(2e-2)$$

$$=\underline{-34e-2}\ \cdots\ [ネ,ノ,ハ]$$

(b) $f'(x)=3x^2+6ax+b$

$$x_n=\begin{cases}\dfrac{f'(x_{n-1})}{x_{n-1}} & (x_{n-1}\neq 0)\\ 1 & (x_{n-1}=0)\end{cases}$$

$x_1=1\neq 0$ より，$x_2=2$ のとき

$$x_2=\frac{f'(x_1)}{x_1}$$

$$2=\frac{3+6a+b}{1}$$

$6a+b=-1$ … ②

$x_3=5$ のとき

$$x_3=\frac{f'(x_2)}{x_2}$$

$$5=\frac{12+12a+b}{2}$$

$12a+b=-2$ … ③

②, ③より $(a,b)=\underline{\left(-\frac{1}{6},0\right)}$ … [ヒ,フ,ヘ]

このとき

$f(x)=3x^2-x$

であるから, $x\neq 0$ のとき

$$\frac{f(x)}{x}=3x-1$$

であり, これは単調増加関数となり, $1\leqq x$ において0になることはないから

$1\leqq x_{n-1}$ において,

$$x_{n+1}=\frac{f'(x_n)}{x_n}=3x_n-1$$

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$$

であり,

$$x_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

なので

$$x_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 3^{n-1}$$

$$x_n=\frac{1}{2}\left(3^{n-1}+1\right)$$

より

$$\frac{x_n}{4^n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{n-1}+1}{4^n}=\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(4+\frac{4}{3}\right)$$

$$=\underline{\frac{2}{3}}\ \cdots\ [ホ,マ]$$

次に，$x_2=2$，$x_3=0$ のとき，前述同様

$6a+b=-1\ \cdots$ ②

また

$$x_3=\frac{f'(x_2)}{x_2}$$

$$0=\frac{12+12a+b}{2}$$

$12a+b=-12\ \cdots$ ④

②, ④より $(a,b)=\underline{\left(-\frac{11}{6},10\right)}\ \cdots$ [ミ ム,メ,モヤ]

である．

このとき，$x_4=1=x_1$ となるので，$x_{n+3}=x_n$ である．

よって

$$\sum_{n=1}^{31}x_n=11x_1+10x_2+10x_3=11\cdot1+10\cdot2+10\cdot0=\underline{31}\ \cdots\ [ユ ヨ]$$

(3) p が素数であれば，p^5 の約数は

$5+1=\underline{6}$ 個 $\cdots$ [ラ]

N を自然数とする．N を素因数分解したときに，3 種類以上の素数の累乗の積となったとき，N の正の約数は 8 個以上となる．

よって，N の正の約数が 6 個となるのは，N を素因数分解したとき，1 種類，もしくは 2 種類の素数の累乗となるときである．すなわち，a，b を異なる素数とすると，$N=a^5$ もしくは $N=a^2b$ の形である．

（ⅰ） $N=a^5$ の形で，N が最も小さくなるのは

$N=2^5=32$

（ⅱ） $N=a^2b$ の形で，N が最も小さくなるのは

$N=2^2\cdot3=12$

よって条件(∗)を満たす最小の自然数は12 … [リル]

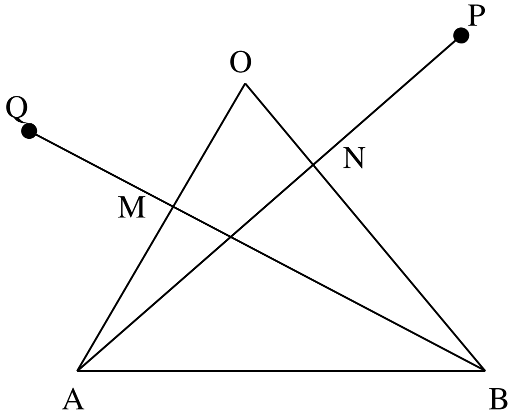
また，$N=a^5$，$N=a^2b$ の形で，N が奇数となる数は小さい順に

$N=3^2\cdot5=45$

$N=3^2\cdot7=63$

となっているので，条件(∗)を満たす最小の正の奇数は63 … [レロ]

2



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=s\vec{a}$，　$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=t\vec{b}$　より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1+u)\overrightarrow{\mathrm{ON}}}{(1+u)-u}$$

$$=\underline{-u\vec{a}+(1+u)t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{-u\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1+u)\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{(1+u)-u}$$

$$=\underline{(1+u)s\vec{a}-u\vec{b}}$$

(2)　O，P，Qが一直線上に並ぶとき，k を0でない定数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$-u\vec{a}+(1+u)t\vec{b}=k\cdot\{(1+u)s\vec{a}-u\vec{b}\}$$

$$-u\vec{a}+(1+u)t\vec{b}=k(1+u)s\vec{a}-ku\vec{b}$$

が成り立ち，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立より

$$\begin{cases}-u=k(1+u)s & \cdots ①\\ (1+u)t=-ku & \cdots ②\end{cases}$$

②より

$$k=-\frac{1+u}{u}t$$

であるから，これを①へ代入して

$$-u=-\frac{1+u}{u}t(1+u)s$$

$$u^2=(1+2u+u^2)st$$

$$(st-1)u^2+2stu+st=0$$

これを u の方程式とみて

$$u=\frac{-st\pm\sqrt{(st)^2-(st-1)st}}{st-1}=\frac{-st\pm\sqrt{st}}{st-1}\quad\cdots ③$$

ここで，$0<s<1$，$0<t<1$ なので，$st-1<0$ であるから，$0<u$ となるのは

$$u=\frac{-st-\sqrt{st}}{st-1}=\frac{-\sqrt{st}(\sqrt{st}+1)}{(\sqrt{st}+1)(\sqrt{st}-1)}=\frac{-\sqrt{st}}{\sqrt{st}-1}=\underline{\frac{\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}}}$$

(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ であり, $s=\dfrac{4}{9}$, $t=\dfrac{1}{9}$ より, (2)から

$$u=\frac{\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}}}{1-\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}}}=\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}}=\frac{2}{7}$$

これらと(1)から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{2}{7}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{1}{9}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\cos\theta-\frac{2}{7}\\\frac{1}{7}\sin\theta\end{pmatrix}$$

であるから, 直線 $y=x+k$ が点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{7}\cos\theta-2,\ \frac{1}{7}\sin\theta\right)$を通るとき

$$\frac{1}{7}\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta-\frac{2}{7}+k$$

$$\underline{k=\frac{1}{7}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{2}{7}}$$

(4) (3)より

$$k=\frac{1}{7}(\sin\theta-\cos\theta)+\frac{2}{7}=\frac{\sqrt{2}}{7}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{7}\quad\cdots④$$

$0<\theta<\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{4}<\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi$ なので

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$$

$$-\frac{1}{7}<\frac{\sqrt{2}}{7}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{1}{7}<\frac{\sqrt{2}}{7}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{2}{7}\leqq\frac{\sqrt{2}}{7}+\frac{2}{7}$$

よって④より

$$\underline{\frac{1}{7}<k\leqq\frac{\sqrt{2}}{7}+\frac{2}{7}}$$

3

(1) $f(x)=x^{-2}$

$f'(x)=-2x^{-3}$

$0<t$ のとき $f'(t)\neq 0$ より, l の方程式は

$$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)=\frac{t^3}{2}(x-t)+t^{-2}=\underline{\frac{t^3}{2}x-\frac{t^4}{2}+t^{-2}}$$

l は $\mathrm{Q}(q,0)$ を通るので

$$0=\frac{t^3}{2}q-\frac{t^4}{2}+t^{-2}$$

$$\frac{t^3}{2}q=\frac{t^4}{2}-t^{-2}$$

$$q=\underline{t-2t^{-5}}\ \cdots\ ①$$

(2) (1) より $q=0$ を解くと

$t-2t^{-5}=0$

$t^6=2$

t は正の実数より

$$t_1=\underline{2^{\frac{1}{6}}}$$

(3) ①より $q<t$ であり, $t_1<t$ なので,

求める面積は右図の斜線部の面積となる.

よって

$$A(t)=1\cdot 1+\int_1^t f(x)dx-\frac{1}{2}(t-q)f(t)\ \cdots\ ②$$

であり, ここで

・$\displaystyle\int_1^t f(x)dx=\int_1^t x^{-2}dx$

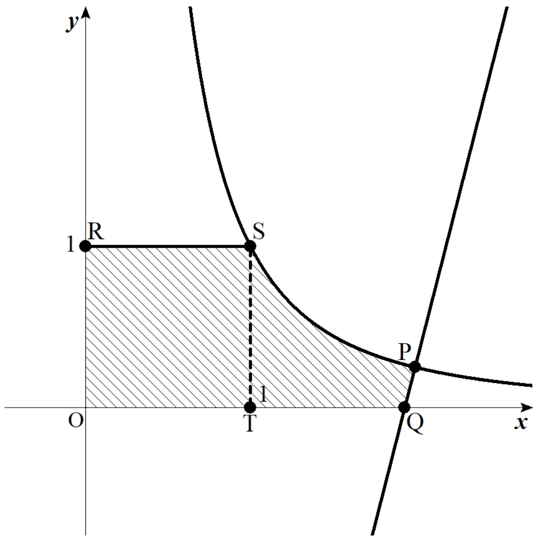
$$=\left[-x^{-1}\right]_1^t$$

$$=-\frac{1}{t}+1$$

・$(t-q)f(t)=\{t-(t-2t^{-5})\}t^{-2}=2t^{-7}$

であるから②は

$$A(t)=1+\left(-\frac{1}{t}+1\right)-\frac{1}{2}\cdot 2t^{-7}=\underline{2-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^7}}$$



(4) (3) より

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=\underline{2}$$

総 評

1

(1)は媒介変数と，楕円の接線の問題で特に特殊な内容でもなく，基本レベルの問題であり，落としてはならない.

(2)の(a)は奇関数，偶関数の定積分の計算問題．誘導なしではそこそこ差がついた問題となったであろうが，親切な誘導もあるため，計算ミスでもしなければ解けた受験生は多いであろう.
(2)の(b)は導関数と数列を絡めた問題で，丁寧に進めていけばそこまで難しい問題ではないのだが，見た目が“ややこしそう”なために手が止まった受験生もいるかもしれない．レベルとしては標準レベル.

(3)は自然数の正の約数の個数問題で，これも基本から標準レベルの問題であるが，見落としによる失点は意外とあるかもしれない.

2

分点の位置ベクトルと，後半は三角関数の合成による最大,最小を求める問題であり，順番に丁寧に解いていけば特にひかかるようなところはないと思われる．しいて差のつきそうな部分を一つ挙げるとすれば(2)の最後の$\pm$の吟味であろうか．その他は特に難しくないと感じる.

3

曲線の法線と，グラフで囲まれた図形の面積の問題で，誘導に従って解き，グラフのイメージがきちんとできていれば特に難しいところはない．こちらでもしいて注意する箇所を挙げれば，式やグラフのイメージをしっかりしないと，「点$\mathrm{Q}(q,0)$が$(1,0)$よりも左にある場合と，右にある場合で場合分けして…」と,場合分けのtを求めようとして，求まらなかった受験生もいるかもしれないが，実際はどちらの場合でも解答の計算でよいことが分かる.

全体的にみて，理科大の入試の中では易しめ問題が多かったように思われる.