— 東京理科大学 —

2月6日　B方式　物理

解答・解説

1 (1) A, Bの従う運動方程式は

$$\begin{cases} 2m a_A = -k(x_A - x_B - L) \\ m a_B = +k(x_A - x_B - L) = \underline{-k(x_B - x_A + L)}_{(ア)} \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} a_A = -\dfrac{k}{2m}(x_A - x_B - L) \\ a_B = +\dfrac{k}{m}(x_A - x_B - L) \end{cases}$$

$$\therefore\ a_A - a_B = \underline{-\frac{3k}{2m}}_{(イ)}(x_A - x_B - L)$$

従ってこの方程式の一般解は本文のように

$$x_A - x_B - L = d_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \quad \text{——①}$$

と表せる。ただし、d_1, θ_1は初期条件から決まる定数であり、$\omega_1 = \underline{\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}}_{(ウ)}$ である。

これを時刻tで微分すれば定数Lは消えて本文のように

$$v_A - v_B = \omega_1 d_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) \quad \text{——②}$$

$$a_A - a_B = -\omega_1^2 d_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

を得る

弾丸の打ち込まれる直前、直後ではA, Bそれぞれ運動量が保存し弾丸の質量はムシできるので$+x$方向に対しA, Bの初速度v_A, v_Bは

$$A: -p = 2m v_A \qquad B: +p = m v_B$$

が成立。これを解けば $v_A = \underline{-\dfrac{p}{2m}}_{(エ)}$, $v_B = \underline{\dfrac{p}{m}}_{(オ)}$ と求められる

①, ②で $t = 0$とすれば

$$\begin{cases} 0 = d_1 \sin\theta_1 \\ -\dfrac{p}{2m} - \dfrac{p}{m} = \omega_1 d_1 \cos\theta_1 \end{cases} \quad (0 \leqq \theta_1 < 2\pi \text{としても一般性は失わない})$$

であり、$d_1 \neq 0$より $\sin\theta_1 = 0$ ∴ $\theta_1 = 0, \pi$

$-\dfrac{3p}{2m} = \omega_1 d_1 \cos\theta_1$ で $d_1 \geqq 0$より $\theta_1 = \underline{\pi}_{(カ)}$ に決まり $d_1 = \underline{\dfrac{3p}{2m\omega_1}}_{(キ)}$ となる。

このとき　$x_A - x_B - L = \dfrac{3p}{2m\omega_1}\sin(\omega_1 t + \pi) = -\dfrac{3p}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t$ より

$x_G = \dfrac{2mx_A + mx_B}{3m} = \dfrac{2}{3}L \iff 2x_A + x_B = 2L$ と連立すれば

$$x_A - x_B - L = -\frac{3p}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t$$

$$+)\ \ 2x_A + x_B = 2L$$

$$3x_A - L = 2L - \frac{3p}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t \quad \therefore\ x_A = \underline{L - \frac{p}{2m\omega_1}\sin\omega_1 t}\ (ウ)$$

$$x_B = -2x_A + 2L = \underline{\frac{p}{m\omega_1}\sin\omega_1 t}\ (エ)$$

(2) A, C の したがう運動方程式は

$$A:\ (\alpha m)a_A = -k(x_A - x_B - L) \quad ―①$$

$$C:\ (\alpha m)a_C = +k(x_B - x_C - L) = \underline{-k(x_C - x_B + L)}\ (コ) \quad ―②$$

2つのばねが伸びているとき，すなわち $x_A - x_B - L > 0$，$x_B - x_C - L > 0$ のとき

B の受ける力を考えれば B の運動方程式は

$$B:\ m a_B = +k(x_A - x_B - L) - k(x_B - x_C - L)$$

$$= \underline{-k(2x_B - x_A - x_C)}\ (サ) \quad ―③$$

①+②+③ ： $\alpha a_A + a_B + \alpha a_C = 0$

①/(αm) − ②/(αm) ： $a_A - a_C = \underline{-\dfrac{k}{\alpha m}}_{(シ)}(x_A - x_C - 2L)$ ―④

((③/m)×2 − ①/(αm) − ②/(αm))

$$2a_B - a_A - a_C = -\frac{2k}{m}(2x_B - x_A - x_C) - \frac{k}{\alpha m}(2x_B - x_A - x_C)$$

$$= \underline{-\frac{(2\alpha+1)k}{\alpha m}}_{(ス)}(2x_B - x_A - x_C) \quad ―⑤$$

$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k}{\alpha m}}$，$\omega_3 = \sqrt{\dfrac{(2\alpha+1)k}{\alpha m}}$ として，④,⑤ の一般解は 本文にあるように

$$\begin{cases} x_A - x_C - 2L = C_2\sin(\omega_2 t + \theta_2) & (C_2 \geqq 0,\ 0 \leqq \theta_2 < 2\pi) ―⑥ \\ 2x_B - x_A - x_C = C_3\sin(\omega_3 t + \theta_3) & (C_3 \geqq 0,\ 0 \leqq \theta_3 < 2\pi) ―⑦ \end{cases}$$

と表せる　これを時刻 t で微分すれば

$$\begin{cases} v_A - v_C = \omega_2 C_2\cos(\omega_2 t + \theta_2) & ―⑧ \\ 2v_B - v_A - v_C = \omega_3 C_3\cos(\omega_3 t + \theta_3) & ―⑨ \end{cases}$$

となる

初期条件($t=0$のとき)を $x_A=L-d$, $x_C=-L+d$, $x_B=0$, $v_A=v_B=v_C=0$として

$$\begin{cases} ⑥: -2d = C_2\sin\theta_2 \\ ⑧: 0 = \omega_2 C_2\cos\theta_2 \end{cases}$$

$\cos\theta_2=0 \Leftrightarrow \theta_2=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. $C_2\geqq 0$より $\theta_2=\frac{3\pi}{2}$ (セ) このとき $C_2=2d$ となる。(ソ)

この対称伸縮運動を表すx-tグラフは ② (タ)

(注) 速度vはx-tグラフの傾きであり $t=0$でのx_A, x_Cの傾きが v_A $v_C=0$となるものを選ぶ

初期条件を $x_A=L$, $x_C=-L$, $v_A=v_C=v_0$ とすれば

$$\begin{cases} ⑥: \quad 0 = C_2\sin\theta_2 \\ ⑧: \quad 0 = \omega_2 C_2\cos\theta_2 \end{cases}$$

※ A, Cの反対称性と、$x_A-x_C=2L$ となるようにとる

とすれば $C_2=0$となり条件を満足する。また 重心$x_G=\dfrac{\alpha x_A+x_B+\alpha x_C}{\alpha+1+\alpha}=0$

となるように初期条件x_Bを取れば、はじめ$x_B=0$とすればよい また常に$x_G=0$

より $x_B=-\alpha(x_A+x_C)=-2\alpha\dfrac{x_A+x_C}{2}=-2\alpha x_M$ (ただしx_MはACの中点のx座標)

となるグラフを選択肢から探せば ④ (チ) が妥当

上記のBが炭素C, A, Cが酸素Oに対応するので

$$m:\alpha m=12:16 \Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{3}$$

このとき対称伸縮運動, 反対称伸縮運動の角周波数はそれぞれ

$$\omega_2=\sqrt{\frac{k}{\alpha m}}, \quad \omega_3=\sqrt{\frac{(2\alpha+1)k}{\alpha m}} \text{ より } \omega_2:\omega_3=1:\sqrt{2\alpha+1}=1:\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\therefore \frac{\omega_3}{\omega_2}=\sqrt{\frac{11}{3}} \text{ (ツ)}$$

$\boxed{2}$ (1) 電場を $\vec{E}$（大きさ E），電位を ϕ で表す

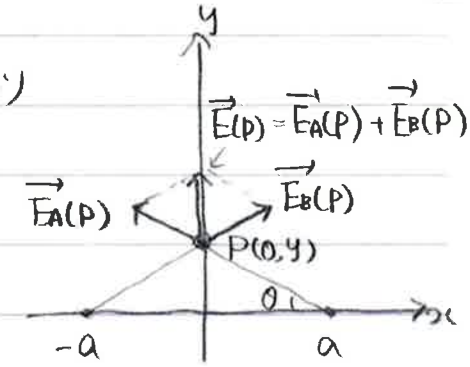
Aでの電場の大きさと電位はそれぞれ $E(A)=k\dfrac{Q}{a^2}$ (ア)，$\phi(A)=k\dfrac{Q}{a}$ (イ)

十分遠く（無限遠方）の電位は $\phi(\infty)=0$ より この点電荷（q[C]）をAまでゆっくり移動する仕事 W は

$$q\phi(\infty)+W=q\phi(A) \iff W=q(\phi(A)-\phi(\infty))=k\frac{Qq}{a} \quad (ウ)$$

(2) Oでの電場 $\vec{E}(O)$ は重ね合わせの原理より $\vec{0}$ なので x,y 成分ともに 0 (エ)(オ)

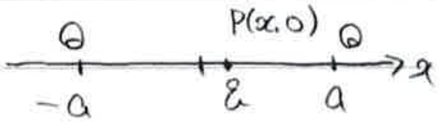
Oでの電位 $\phi(O)$ 〃 より $\phi(O)=\phi_A(O)+\phi_B(O)=k\dfrac{Q}{a}\times 2=\dfrac{2kQ}{a}$ (カ)



P(0,y)における電場 $\vec{E}(P)$ は重ね合わせの原理より $y>0$ のとき $+y$ 方向，$y<0$ のとき $-y$ 方向で，Oから $+y$ 方向にずらして静かに手を離すと $+y$ 方向へ進む。このとき力学的エネルギー保存則より

$$q\phi(O)=q\phi(\infty)+\frac{1}{2}mv_\infty^2$$

$$\iff v_\infty=2\sqrt{\frac{kQq}{ma}} \quad (キ)$$



P(x,0)における電場 $\vec{E}(P)$ は重ね合わせの原理より $x>0$ のとき $-x$ 方向，$x<0$ のとき $+x$ 方向で

その x 成分は

$$E_x(P)=k\frac{Q}{(x+a)^2}-k\frac{Q}{(x-a)^2}$$

となる

$|x|\ll a$ のとき $(x\pm a)^{-2}=\{a(1\pm\frac{x}{a})\}^{-2}\fallingdotseq a^{-2}(1\mp 2\frac{x}{a})$ より

$$E_x(P)=\frac{kQ}{a^2}\left(1-\frac{2x}{a}\right)-\frac{kQ}{a^2}\left(1+\frac{2x}{a}\right)=-\frac{4kQ}{a^3}x.$$

Pにある q[C]の粒子の受ける力は $\vec{F}(P)=q\vec{E}(P)$ であり その x 成分は

$$F_x(P)=-\frac{4kQq}{a^3}x \quad (ク)$$ となる

このとき x 方向の運動e.q.は $m\ddot{x} = -\dfrac{4kQq}{a^3}x$ となり単振動e.q.であることがわかる。この単振動の周期Tは $\omega = \sqrt{\dfrac{4kQq}{ma^3}}$ として

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{ma^3}{kQq}} \quad \text{(ケ)}$$

(3) Bにおいた電荷の電気量を Q_B とする。このとき $\phi(P_1)=0$ より

$$\phi(P_1) = k\frac{Q_B}{\frac{8}{5}a} + k\frac{Q}{\frac{2}{5}a} = 0 \qquad Q_B = -4Q\ (<0) \quad \text{(コ)}$$

P_2 の x 座標は $P(x,0)$ の $\phi(P) = k\dfrac{-4Q}{|x+a|} + k\dfrac{Q}{|x-a|} = 0$ となる x で $x \neq \frac{3}{5}a$ のものを求めればよい

$$\frac{4}{|x+a|} = \frac{1}{|x-a|} \iff 4|x-a| = |x+a|$$
$$\iff 4(x-a) = 1(x+a)$$
$$\iff x = \frac{3}{5}a,\ \frac{5}{3}a \quad \text{(サ)}$$

$x > \frac{5}{3}a$ のとき $\phi(P) = -\dfrac{4kQ}{x+a} + \dfrac{kQ}{x-a}$ であり

※ 関数 $f(x) = -\dfrac{4}{x+a} + \dfrac{1}{x-a}$ $(x > \frac{5}{3}a)$ の極小値を探せばよい

$f'(x) = +\dfrac{4}{(x+a)^2} - \dfrac{1}{(x-a)^2} = 0$ となる x は $4(x-a)^2 - (x+a)^2$ の所で与えられる

$\{2(x-a)-(x+a)\}\{2(x-a)+(x+a)\} = 0$

より $x = 3a,\ \frac{1}{3}a$ だが $x > \frac{5}{3}a$ となるのは $x = 3a$ のとき (シ)

※ $E = -\dfrac{d\phi}{dx}$ より $E=0$ となる x を探すことと同値。

このとき $\phi(P) = -\dfrac{kQ}{a} + \dfrac{kQ}{2a} = -\dfrac{kQ}{2a}$ (ス)

$x \to +\infty$ における初速0の q[C]の荷電粒子の力学的エネルギー保存則は

$$q\overset{0}{\phi(\infty)} + \frac{1}{2}m0^2 = q\phi(P) + \frac{1}{2}mv^2$$

$x > a$ を運動するので、Aに最も接近するのは $v=0$ となるとき ∴ $\phi(P)=0$ のとき

これは(サ)より $x = \frac{5}{3}a$ のとき (セ)。速さが最大となるのは $\phi(P)$ が極小のときで $x=3a$ のとき (ソ)

このとき $\dfrac{1}{2}mv_{max}^2 = 0 - q\phi(P) = \dfrac{kQq}{2a}$ より $v_{max} = \sqrt{\dfrac{kQq}{ma}}$ (タ) となる

3 理想気体の状態方程式より $PSL_1=nRT \Leftrightarrow n=\frac{PSL_1}{RT}$ (ア)

状態a : $(P,\ SL_1,\ T)$

過程1　↓ $Q_{in}=0$

状態b : $(2P,\ SL_2,\ T_2)$

過程2　↓ $2P=$一定 (定圧変化)

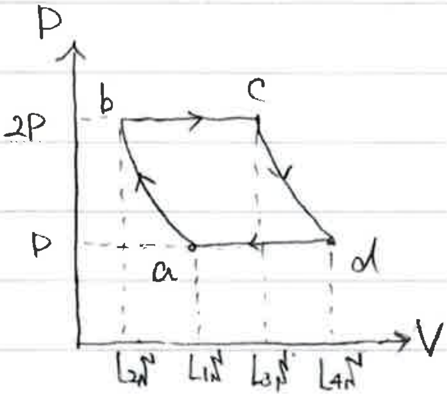
状態c : $(2P,\ SL_3,\ T_3)$

過程3　↓ $Q_{in}=0$

状態d : $(P,\ SL_4,\ T_4)$

過程4　↓ $P=$一定 (定圧変化)

状態a : $(P,\ SL_1,\ T)$



過程1 : $Q_{in}=0$ より $W_1+\Delta U_1=0 \Rightarrow |W_1|=|\Delta U_1|$ (イ)

$\frac{2PSL_2}{T_2}=\frac{PSL_1}{T}$ より $T_2=\frac{2L_2}{L_1}T$ (ウ)

∴ $\Delta U_1=nC_V\Delta T=\frac{PSL_1}{RT}\cdot C_V(T_2-T)=\frac{C_V}{R}PSL_1\left(\frac{2L_2}{L_1}-1\right)=\frac{C_V}{R}PS(2L_2-L_1)$ (エ)

過程2 : $\frac{SL_2}{T_2}=\frac{SL_3}{T_3}$ より $T_3=\frac{L_3}{L_2}T_2=\frac{L_3}{L_2}\cdot\frac{2L_2}{L_1}T=\frac{2L_3}{L_1}T$ (オ)

$W_2=2P(L_3-L_2)S$ (カ)　$\Delta U_2=nC_V\Delta T=\frac{PSL_1}{RT}C_V(T_3-T_2)=\frac{2C_V}{R}PS(L_3-L_2)$ (キ)

熱力学第1法則より $Q_2=W_2+\Delta U_2$ (ク) $=2\left(\frac{C_V}{R}+1\right)PS(L_3-L_2)$

過程3 : $\frac{2PSL_3}{T_3}=\frac{PSL_4}{T_4}$ より $T_4=\frac{L_4}{2L_3}T_3=\frac{L_4}{L_1}T$ (ケ)

$\Delta U_3=nC_V(T_4-T_3)=\frac{PSL_1}{RT}C_V\left(\frac{L_4}{L_1}-\frac{2L_3}{L_1}\right)T=\frac{C_V}{R}PS(L_4-2L_3)$

∴ $W_3=-\Delta U_3=\frac{C_V}{R}PS(2L_3-L_4)$ (コ)

過程4 : $Q_4=W_4+\Delta U_4=PS(L_1-L_4)+nC_V(T-T_4)$

$=-PS(L_4-L_1)+\frac{PSL_1}{RT}C_V\left(T-\frac{L_4}{L_1}T\right)=-PS(L_4-L_1)-\frac{C_V}{R}PS(L_4-L_1)=-\left(\frac{C_V}{R}+1\right)PS(L_4-L_1)$ (サ)

このサイクルの熱効率 η は $\eta = \dfrac{W}{Q_2}$ で与えられる (ミ)

$W = Q_2 + Q_4 = \left(\dfrac{C_V}{R}+1\right)PA\{2(L_3-L_2)-(L_4-L_1)\} = \left(\dfrac{C_V}{R}+1\right)PA(L_1-2L_2+2L_3-L_4)$ (ス)

より $\eta = 1+\dfrac{Q_4}{Q_2} = 1-\dfrac{L_4-L_1}{2(L_3-L_2)}$ となる (セ)

ポアソンの関係の断熱過程より

過程1 : $P(AL_1)^\gamma = 2P(AL_2)^\gamma \iff \left(\dfrac{L_1}{L_2}\right)^\gamma = 2 \iff \dfrac{L_1}{L_2} = 2^{\frac{1}{\gamma}}$

過程3 : $2P(AL_3)^\gamma = P(AL_4)^\gamma \iff \left(\dfrac{L_4}{L_3}\right)^\gamma = 2 \iff \dfrac{L_4}{L_3} = 2^{\frac{1}{\gamma}}$

$\therefore \dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{L_4}{L_3} = 2^{\frac{1}{\gamma}}$ (ソ)

$L_4 = 2^{\frac{1}{\gamma}}L_3 \quad L_1 = 2^{\frac{1}{\gamma}}L_2$ より $\eta = 1-\dfrac{2^{\frac{1}{\gamma}}\cancel{(L_3-L_2)}}{2\cancel{(L_3-L_2)}} = 1-2^{\frac{1}{\gamma}-1}$

$\therefore \beta = \dfrac{1}{\gamma}-1$ (タ)

総 評

本日の理科大の試験は，難関大の問題としては難易度も分量も標準的でしたが，若干，高校の物理の内容というよりは大学の教養課程の定期テストの問題のような感じがしました。

1 は連成振動の問題です。このような連成振動の問題では，一般にはモードと呼ばれる運動の分解(数学的には座標変換)を施して運動を簡単な運動の重ね合わせ(線形和)にしていくのですが，初見ではきつかったかもしれません。物理学としては基本的な内容であっても，いわゆる「高校の教科書をしっかり学習するだけ」では，なかなかこのような問題に対応できないのではないでしょうか。

2 は静電場と静電位の重ね合わせの問題です。これは基本的と言えば基本的ですが，後半の「ポテンシャル(電位)の極小」はイメージしづらいかもしれません。一般に，ポテンシャル曲線の極小点の近傍では質点は単振動し，速さが最大になることなどは大学の教養レベルでしょうか。なお，筆者の理系館での講義ではこの事実を話してはいますが，力学を学ぶ 1 学期にこの内容を理解できているかは怪しいと思います。やはり力学の通しの 2 回目，つまり大学で学ぶのが順当だと思うのですが。

3 は状態変化と熱サイクルの効率の問題です。問題文を読みながら状況を整理して PV グラフを書いていけば何のこともないのですが，試験会場で冷静に整理できたかが勝負の分かれ目かもしれません。

今回も 6 割は取りたいですね。