# ― 東京理科大学 ―

## 2 月 8 日　B 方式　数学

### 解 答・解 説

## 1

(1) (a) $\begin{cases} g_1(x)=(x-4)^2 \\ g_2(x)=x-2 \\ h(x)=-x^2+6x+4 \end{cases}$

とする.

・ $g_1(x)=g_2(x)$ を解くと

$x^2-9x+18=0$

$(x-3)(x-6)=0$

$x=3,6$

・ $g_1(x)=h(x)$ を解くと

$2x^2-14x+12=0$

$x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$

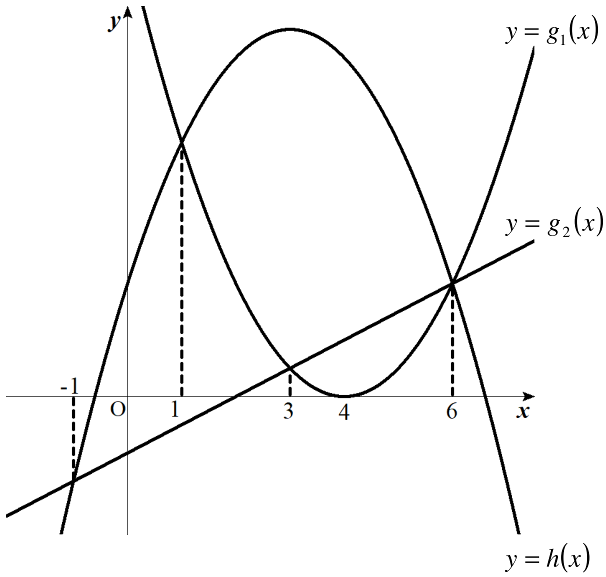
$x=1,6$

・ $g_2(x)=h(x)$ を解くと

$x^2-5x-6=0$

$(x+1)(x-6)=0$

$x=-1,6$ … ④'




であるから， $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$，$y=h(x)$ のグラフは上図.

$f(x)=(x-4)^2$ となるための必要十分条件は，グラフから

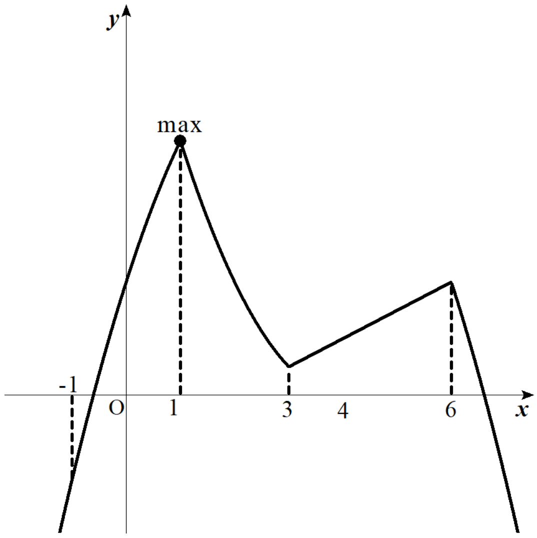
$\underline{1\leqq x\leqq 3}$ または $\underline{x=6}$ … [ア,イ,ウ]

$f(x)=x-2$ となるための必要十分条件は，グラフより

$\underline{3\leqq x\leqq 6}$ または $\underline{x=-1}$ … [エ,オ,カ]

（$x=-1$ のとき $g_2(x)=h(x)$ であるから.）

(b) $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x+4 & (x\leqq 1,\ 6\leqq x) \\ (x-4)^2 & (1\leqq x\leqq 3) \\ x-2 & (3\leqq x\leqq 6) \end{cases}$




より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになるので，$x$ が実数全体を動くとき，$f(x)$ の最大値は

$\underline{f(1)=9}$ … [キ]

そのときの $x$ の値は $\underline{1}$ … [ク]

(c) $y=f(x)$ と $y=k$ のグラフの交点が 4 個となる条件と等しいので, 右図より

$f(3)<k<f(6)$

$\underline{1<k<4}$ … [ケ,コ]

(d) $10\leqq t$ なので，グラフより

$$\int_0^t f(x)dx=\int_0^1(-x^2+6x+4)dx+\int_1^3(x-4)^2dx+\int_3^6(x-2)dx+\int_6^t(-x^2+6x+4)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+4x\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_1^3+\left[\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_3^6+\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+4x\right]_6^t$$

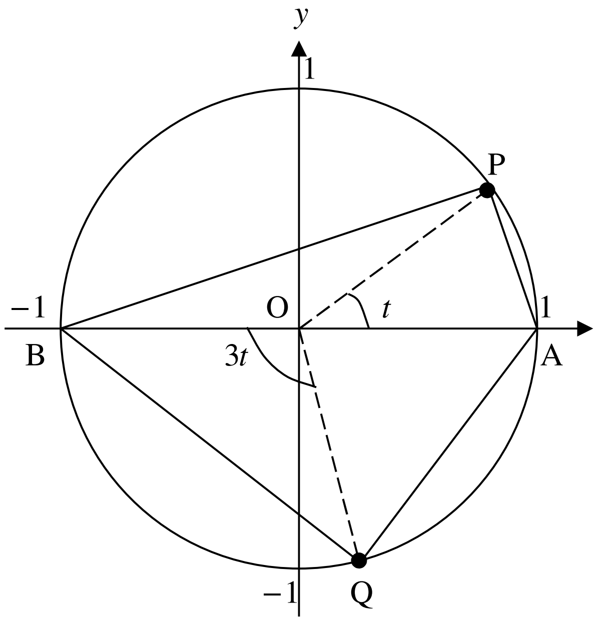
$$=-\frac{1}{3}+3+4+\frac{1}{3}\{-1-(-27)\}+\frac{1}{2}(16-1)-\frac{1}{3}t^3+3t^2+4t-(-72+108+24)$$

$$=\underline{-\frac{1}{3}t^3+3t^2+4t-\frac{223}{6}} \quad \cdots \ [サ\sim ツ]$$

(2) (a) $\angle\mathrm{AOP}=t$，　$\angle\mathrm{BOP}=\pi-t$　であり，

$\mathrm{OA}=\mathrm{OP}=\mathrm{OB}=1$　なので

$$\triangle\mathrm{APB}=\triangle\mathrm{AOP}+\triangle\mathrm{BOP}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin t+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-t)$$
$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}\sin t$$
$$=\underline{\sin t}\ \cdots\ [テ]$$




$\angle\mathrm{BOQ}=3t$，　$\angle\mathrm{BOP}=\pi-3t$，$\mathrm{OQ}=1$　なので

$$\triangle\mathrm{AQB}=\triangle\mathrm{AOQ}+\triangle\mathrm{BOQ}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin3t+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-3t)$$
$$=\frac{1}{2}\sin3t+\frac{1}{2}\sin3t$$
$$=\underline{\sin3t}\ \cdots\ [ト]$$

(b) (a) より

$S(t)=\sin t+\sin3t$　であるから

$$S'(t)=\cos t+3\cos3t$$
$$=\cos t+3\left(-3\cos t+4\cos^3 t\right)$$
$$=\underline{4\cos t\left(3\cos^2 t-2\right)}\ \cdots\ [ナ,ニ,ヌ]$$

(c) $\alpha$ を $\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$，　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$　をみたす角とする．このとき

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}-4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

| $t$ | 0 | | $\alpha$ | | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | 0 | | |
| $f(t)$ | 0 | ↗ | $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

であり，(b) より $S(t)$ の増減は右のようになる．

よって，$0<t<\dfrac{\pi}{3}$　における $S(t)$ の最大値は

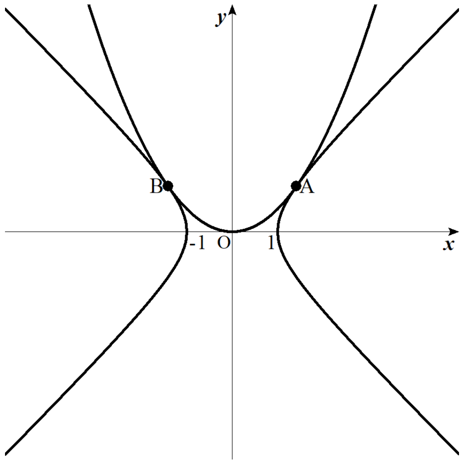
$$S(\alpha)=\sin\alpha+\sin3\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{5\sqrt{3}}{9}=\underline{\frac{8\sqrt{3}}{9}}\ \cdots\ [ネ,ノ,ハ]$$

であり，このときの $\cos t$ の値は

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}} \quad \cdots \quad [ヒ,フ]$$

# 2

(1) $\begin{cases} C_1 : x^2 - y^2 = 1 & \cdots ① \\ C_2 : y = ax^2 & \cdots ② \end{cases}$




①に②を代入して

$$x^2 - (ax^2)^2 = 1$$

$$a^2(x^2)^2 - x^2 + 1 = 0 \quad \cdots ③$$

$a \neq 0$ より，③を $x^2$ の 2 次方程式である.
$C_1$ と $C_2$ はともに $y$ 軸に関して対称なグラフなので，$C_1$ と $C_2$ がちょうど 2 つの共有点をもつのは，図のように接している状態である.
そのようになるには, ③の判別式を $D$ として
$D = 0$

$$(-1)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 1 = 0$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$0 < a$ より $\underline{a = \frac{1}{2}}$

このとき②, ③は

$$C_2 : y = \frac{1}{2}x^2 \quad \cdots ②'$$

$$\frac{1}{4}(x^2)^2 - x^2 + 1 = 0 \quad \cdots ③'$$

③’を解くと

$$(x^2)^2 - 4x^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 = 0$$

$x^2 = 2$ よって $x = \pm\sqrt{2}$ より，これが接点の $x$ 座標であり，②’より，$y$ 座標は,

どちらの場合も $y = 1$ である. A の $x$ 座標は正なので

$\underline{\mathrm{A}(\sqrt{2}, 1), \mathrm{B}(-\sqrt{2}, 1)}$

(2) (1) より $A\left(\sqrt{2},1\right)$ であるから，$l_1$ の方程式は

$$\sqrt{2}\cdot x-1\cdot y=1$$

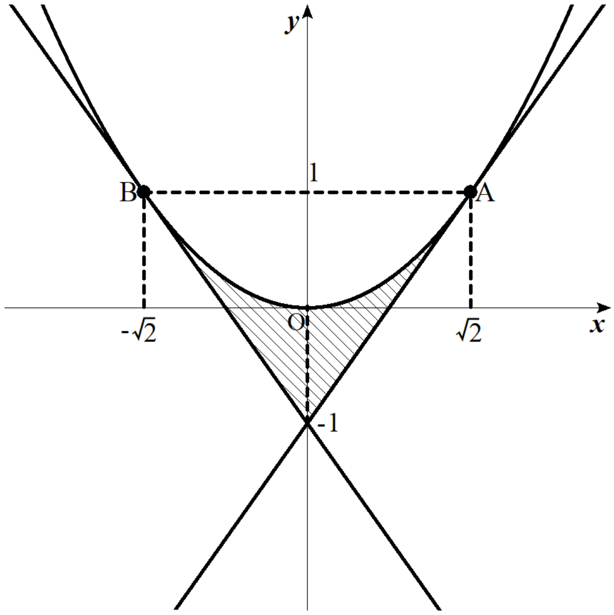
$$y=\sqrt{2}x-1$$

同様，$B\left(-\sqrt{2},1\right)$ であるから，$l_2$ の方程式は

$$-\sqrt{2}\cdot x-1\cdot y=1$$

$$y=-\sqrt{2}x-1$$

以上から $\begin{cases} l_1 : y=\sqrt{2}x-1 \\ l_2 : y=-\sqrt{2}x-1 \end{cases}$




(3) 求める面積は右図の斜線部の面積で，

$y$ 軸に関して対称であるから，$D$ の面積を $S$ とすると，

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}x^2-\left(\sqrt{2}x-1\right)\right\}dx$$

$$\left(=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left|\frac{1}{2}\right|\left(\sqrt{2}\right)^3 \quad \leftarrow \ 1/3 \ \text{面積公式}\right)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(4) $C_2 : y=\dfrac{1}{2}x^2 \ \Leftrightarrow \ C_2 : x^2=2y$

であるから，求める体積を $V$ とすると

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 2-\pi\int_0^1 2y\,dy=\frac{4}{3}\pi-\pi\left[y^2\right]_0^1=\frac{4}{3}\pi-\pi=\frac{\pi}{3}$$

# 3

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x+x^3}$ より

$$f'(x)=\frac{2x(1+x+x^3)-x^2(1+3x^2)}{(1+x+x^3)^2}=\underline{\frac{-x^4+x^2+2x}{(x^3+x+1)^2}}\ \cdots\ ①$$

(2) $(x^3+x+1)'=3x^2+1>0$ であり,

$2^3+2+1=11\neq 0$
なので

$(x^3+x+1)^2>0$

$g(x)=-x^4+x^2+2x$
とおくと
$g'(x)=-4x^3+2x+2=-2(2x^3-x-1)=-2(x-1)(2x^2+2x+1)$
であり,

$$2x^2+2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

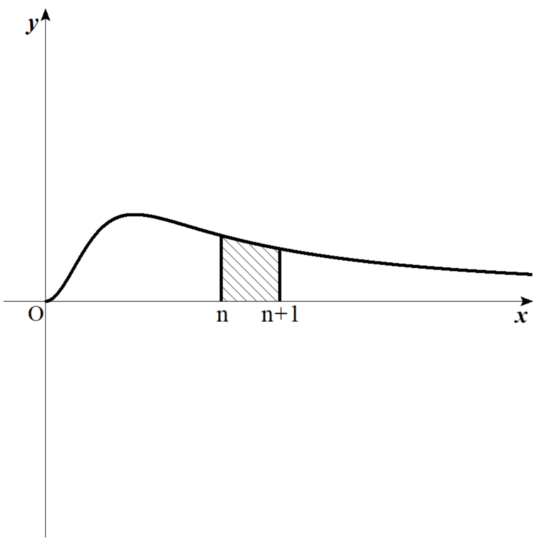
であることに注意すると，$2\leqq x$ において
$g'(x)<0$ であり,
$g(2)=-2^4+2^2+2\cdot 2=-8<0$
であるから，$2\leqq x$ において $g(x)<0$
よって，①より $2\leqq x$ において $f'(x)<0$ となる.（終）

(3) $f(1)=\dfrac{1}{9}$ であり，(2)より $2\leqq x$ において
$f'(x)<0$
また

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは
右のようになる.
よって $a_n$ は，$x=n$，$x=n+1$，
$y=f(x)$，$x$ 軸で囲まれた面積である.
$n$ が十分大きいとき

$$\int_n^{n+1} f(n+1)dx<a_n<\int_n^{n+1} f(n)dx$$



$$\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)+(n+1)^3} < a_n < \frac{n^2}{1+n+n^3} \quad \cdots \text{②}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{1+(n+1)+(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n+n^3} = 0$$

なので，②におけるはさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{0}$$

(4)　②より

$$\frac{n(n+1)^2}{1+(n+1)+(n+1)^3} < na_n < \frac{n^3}{1+n+n^3} \quad \cdots \text{③}$$

であり

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)^2}{1+(n+1)+(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{1+n+n^3} = 1$$

なので，③におけるはさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \underline{1}$$

## 総 評

### 1

(1)は関数の大小比較の問題であるが，「必要十分条件」という言葉に身構えた受験生もいるかもしれない．（今回はあまり気にせず，各 $f(x)$ となる条件と考えればよい．）はじめからグラフをかいて考えればそこまで戸惑うことはないが，式だけで処理をしようとすると(a)の[カ]の部分が何を指すのかわからず手が止まった受験生もいたのではないだろうか? (b)以降はグラフをきちんと書いて考えればそれほど難しくない単調な問題で，(c)の計算だけはしっかり丁寧に得点したい．

(2)は円に内接する三角形の性質を利用した面積に関わる問題．三角関数の増減などもとくに捻った部分はないが，解答欄的なこととして，[テ]が1というのに違和感をもった受験生もいるように思う．

### 2

前半は双曲線と放物線が接する条件，後半は放物線とその2接線で囲まれた図形の面積および $y$ 軸に関する回転体の体積の問題．前半は特に難しい部分はないだろう．後半の面積であるが，センター試験でも頻出である $1/12$ 面積公式か $1/3$ 面積公式を上手に使いこなしたい問題である．解答では，答案をコンパクトに収めるために $1/3$ 面積公式のほうで解いた．$1/12$ および $1/3$ 面積公式は検定教科書の公式ではないため，いきなり書くのは減点される可能性が高いので，解答のように，定積分の式までは書き，計算だけ公式で済ませてしまうのが良いであろう．回転体についても，円錐になる部分は積分ではなく普通に円錐の体積公式を使えばよい．問題自体はさほど難しくないが，面積公式の知識や要領の良さで時間短縮や計算のミスなどの差が出たのではないだろうか．

### 3

分数関数と積分の評価の問題．前半(1), (2)はさほど難しい問題ではない．後半(3), (4)は積分区間が $[n, n+1]$ であること，$f(x)$ が正で，0 になることのない単調減少関数であることから，解き慣れている受験生は面積の比較と，その不等式によるはさみうちの原理と気づけたであろうが，論証が苦手な受験生には(3)で苦戦したと思われる．

全体的には基本～標準的な問題であったように感じるが，3 の(3), (4)は差がついた問題ではないだろうか．