# ― 東京理科大学 ―

## 2 月 9 日　B 方式　数学

## 解 答・解 説

### 1

(1) $\begin{cases} f(x) = x^3 - x \\ g(x) = x^2 + a \end{cases}$ とおく.

(a) $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - 1 \\ g'(x) = 2x \end{cases}$

$C_1$, $C_2$ が $x = s$ で接するとき

$\begin{cases} f(s) = g(s) \\ f'(s) = g'(s) \end{cases}$

$\begin{cases} s^3 - s = s^2 + a & \cdots ① \\ 3s^2 - 1 = 2s & \cdots ② \end{cases}$

をともに満たす.

②より

$3s^2 - 2s - 1 = 0$

$(3s+1)(s-1) = 0$

$s = 1, -\dfrac{1}{3}$

①より

$a = s^3 - s^2 - s$

であり,

・ $s = 1$ のとき $a = 1 - 1 - 1 = -1$

・ $s = -\dfrac{1}{3}$ のとき $a = -\dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{27}$

よって, $C_1$ と $C_2$ が接するのは

$\underline{a = -1, \dfrac{5}{27}}$ … [ア,イ,ウエ]

のときである.

(b) $l$ の方程式は

$y = f'(t)(x - t) + f(t)$

$$=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$$
$$=(3t^2-1)x-2t^3$$

であり，これと $C_2$ が接するとき

$$x^2+a=(3t^2-1)x-2t^3$$
$$x^2-(3t^2-1)x+2t^3+a=0$$

が重解をもつので，この判別式を $D$ とすると

$D=0$ を満たすので

$$\{-(3t^2-1)\}^2-4\cdot 1\cdot(2t^3+a)=0$$
$$9t^4-6t^2+1-8t^3-4a=0$$
$$4a=9t^4-8t^3-6t^2+1$$
$$a=\underline{\frac{9}{4}t^4-2t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{4}}\ \cdots\ [\text{オ〜サ}]$$

(c)　$C_1$ と $l$ の共有点の $x$ 座標は

$$x^3-x=(3t^2-1)x-2t^3$$
$$x^3-3t^2x+2t^3=0$$
$$(x+2t)(x-t)^2=0$$

であるから，$C_1$ と $l$ は $x=t$ で接し，$x=-2t$ で交わっている．

よって，$C_1$ と $l$ で囲まれた図形の面積を $S$ とすると

$$S=\frac{1}{12}|1|(t+2t)^4=\frac{(3t)^4}{12}=\underline{\frac{27}{4}}t^4\ \cdots\ [\text{シス,セ}]$$

(2) (a) 5チームで総当たり戦を行うとき，各チーム4回の試合を行うこととなる．
特定のチームが全勝した場合，それ以外のどこかのチームも全勝することはありえない．

Aチームが全勝する確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

他のチームも全勝する確率も同様で，かつ互いに排反であるので，全勝するチームが存在する確率は

$$5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$$

よって，全勝のチームがない確率は，この余事象の確率より

$$1-\frac{5}{16}=\underline{\frac{11}{16}}\quad\cdots\ [アイ,ウエ]$$

さらに，特定のチームが全敗した場合，どれ以外のどこかのチームも全敗することはありえない．

よって，全勝のチームが存在する確率同様，全敗のチームがある確率は $\frac{5}{16}$

ここで，Aが全勝し，かつBが全敗する確率を考えると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^7}$$

であり，他の適当な2チームについても全勝と全敗の組み合わせの確率は等しい．
よって，全勝したチームと全敗したチームが同時にいる確率は

$${}_5P_2\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{5}{32}$$

よって，全勝もしくは全敗のチームの少なくともどちらかがある確率は

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}-\frac{5}{32}=\frac{15}{32}$$

なので，全勝のチームも全敗のチームもない確率はこの余事象の確率より

$$1-\frac{15}{32}=\underline{\frac{17}{32}}\quad\cdots\ [オカ,キク]$$

(b) Aがちょうど3勝する確率は

$${}_4C_3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{32}{81}}\quad\cdots\ [ケコ,サシ]$$

Aが3勝し，かつ優勝しないのは，Aに唯一勝ったチームがほかのチームにも全勝して4勝いるときに限られる．

よってその確率は

$$ {}_4C_3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\underline{\frac{4}{81}}\quad\cdots\ [\text{ス,セソ}] $$

A が優勝する確率は次の場合が考えられる.

（ⅰ） A が全勝(4 勝)する.

（ⅱ） A が 3 勝し，かつ他のチームで 4 勝しているチームがいない.

（ⅲ） A が 2 勝し，かつ他のチームで 3 勝以上しているチームがいない.

(ⅰ)の確率は

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81} $$

(ⅱ)の確率は， A に唯一勝ったチームが全勝しなければよいので

$$ {}_4C_3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}=\frac{28}{81} $$

(ⅲ)の確率は，すべての試合が ${}_5C_2=10$ 通りであるから， A が 2 勝で優勝となるのは，全チームが 2 勝(2 敗)であるときである.

そのような結果の一例として右の表ような結果が考えられる.

縦の列の勝ちを○，負けを×としている.

|  | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A |  |  |  |  |  |
| B | ○ |  |  |  |  |
| C | ○ | ○ |  |  |  |
| D | × | ○ | ○ |  |  |
| E | × | × | ○ | ○ |  |

このようになる確率は

$$ \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{3^4\cdot2^4} $$

であり， A の行と列を固定して， B , C , D , E を並び替えただけパターンが考えられるので，全チームが 2 勝(2 敗)となる確率は

$$ 4!\cdot\frac{1}{3^4\cdot2^4}=\frac{1}{3^3\cdot2}=\frac{1}{54} $$

よって， A が優勝する確率は(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)より

$$ \frac{16}{81}+\frac{28}{81}+\frac{1}{54}=\underline{\frac{91}{162}}\quad\cdots\ [\text{タチ,ツテト}] $$

(3) (a) $z^4+az^3+bz^2+cz+d=0$ ⋯ (*)

$a$, $b$, $c$, $d$ は実数なので，(*)が $2+\sqrt{5}i$ を解にもつとき，$2-\sqrt{5}i$ も解にもつ.

残りの2解を $\alpha$, $\beta$ とすると，これら4個を解にもつ4次方程式は

$(z^2-4z+9)(z-\alpha)(z-\beta)=0$

$(z^2-4z+9)\{z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta\}=0$ ⋯ (☆)

$z^4+\{-(\alpha+\beta)-4\}z^3+\{4(\alpha+\beta)+\alpha\beta+9\}z^2+\{-9(\alpha+\beta)-4\alpha\beta\}z+9\alpha\beta=0$

であり，これが(*)と一致するので，各係数を比較して

$$\begin{cases} a=-(\alpha+\beta)-4 & \cdots ① \\ b=4(\alpha+\beta)+\alpha\beta+9 & \cdots ② \\ c=-9(\alpha+\beta)-4\alpha\beta & \cdots ③ \\ d=9\alpha\beta & \cdots ④ \end{cases}$$

①より

$\alpha+\beta=-a-4$ ⋯ ①’

これと②より

$\alpha\beta=4a+b+7$ ⋯ ②’

であるから，これらを③，④へ代入し整理すると

$c=\underline{-7a-4b+8}$ ⋯ [ア,イ,ウ]

$d=\underline{36a+9b+63}$ ⋯ [エオ,カ,キク]

であり，(*)の左辺を因数分解した式は，(☆)の左辺に①’と②’を代入して

$\underline{(z^2-4z+9)\{z^2+(a+4)z+4a+b+7\}}$ ⋯ [ケ,コ,サ,シ,ス]

(b) $|2\pm\sqrt{5}i|=3$ なので，

$|\alpha|=|\beta|=\sqrt{5}$ ⋯ ⑤

(*)の4解の総和が7より

$(2+\sqrt{5}i)+(2-\sqrt{5}i)+\alpha+\beta=7$

$\alpha+\beta=3$

であるから，$\alpha$, $\beta$ は複素数でかつ互いに共役である．よって⑤から

$\alpha\beta=5$

なので，①,②より

$a=-3-4=\underline{-7}$ ⋯ [セ]

$b=4\cdot 3+5+9=\underline{26}$ ⋯ [ソタ]

(c) (b)より，$z_1$, $z_2$ は $\alpha$, $\beta$ のことであるから

$z^2-3z+5=0$

の2解であり，解と係数の関係より

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}$$

$$(z_1-z_2)^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot 5=-11$$

であるから

$$|z_1-z_2|=\sqrt{11}$$

なので

$$\frac{|z_1-z_2|}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

より，円 $C$ は複素数平面上における

中心 $\frac{3}{2}$，半径 $\frac{\sqrt{11}}{2}$ の円 … ⑥

$w^2-pw+q=0$ … ⑦

が虚数解をもつ条件は，この式の判別式を $D$ として

$D<0$

$p^2-4q<0$ … ⑧

⑦の解の1つを $\gamma$ とすると，$\gamma$ が $C$ 上の点であるとき，⑥より

$$\left|\gamma-\frac{3}{2}\right|=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

を満たし，この両辺を2乗して

$$\left|\gamma-\frac{3}{2}\right|^2=\frac{11}{4}$$

$$\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)\left(\overline{\gamma-\frac{3}{2}}\right)=\frac{11}{4}$$

$$\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)\left(\overline{\gamma}-\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}$$

$$\gamma\overline{\gamma}-\frac{3}{2}(\gamma+\overline{\gamma})-\frac{1}{2}=0$$

ここで，$\gamma$，$\overline{\gamma}$ は⑦の2解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\gamma+\overline{\gamma}=p\\ \gamma\overline{\gamma}=q\end{cases}$$

なので

$q-\dfrac{3}{2}p-\dfrac{1}{2}=0$

$q=\dfrac{3}{2}p+\dfrac{1}{2}$ … ⑨

これを⑧へ代入して

$p^2-6p-2<0$

より，これを解いて

$\underline{3-\sqrt{11}<p<3+\sqrt{11}}$ … [チ,ツテ]

であり

$\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{11}<\dfrac{3}{2}p<\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{11}$

$5-\dfrac{3}{2}\sqrt{11}<\dfrac{3}{2}p+\dfrac{1}{2}<5+\dfrac{3}{2}\sqrt{11}$

より，これと⑨から

$\underline{5-\dfrac{3}{2}\sqrt{11}<q<5+\dfrac{3}{2}\sqrt{11}}$ … [ト,ナ,ニ,ヌネ]

# 2

(1) $\begin{cases} 3|x|+|y| \leqq 3 \\ y \geqq x+p \end{cases}$

$3|x|+|y|=3$ のグラフのうち，

第1象限の部分の直線の方程式は

$y=-3x+3$ ⋯ ①

第2象限の部分の直線の方程式は

$y=3x+3$ ⋯ ②

第3象限の部分の直線の方程式は

$y=-3x-3$ ⋯ ③

である．

$l: y=x+p$

とする．

・ $p=2$ のとき，$D$ は図 1 の斜線部．

①と $l$ の交点の $x$ 座標は

$-3x+3=x+2$

$x=\dfrac{1}{4}$

②と $l$ の交点の $x$ 座標は

$3x+3=x+2$

$x=-\dfrac{1}{2}$

よってこのとき $D$ の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot(3-2)\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|$$

$=\dfrac{3}{8}$ ⋯ $\boxed{（あ）}$

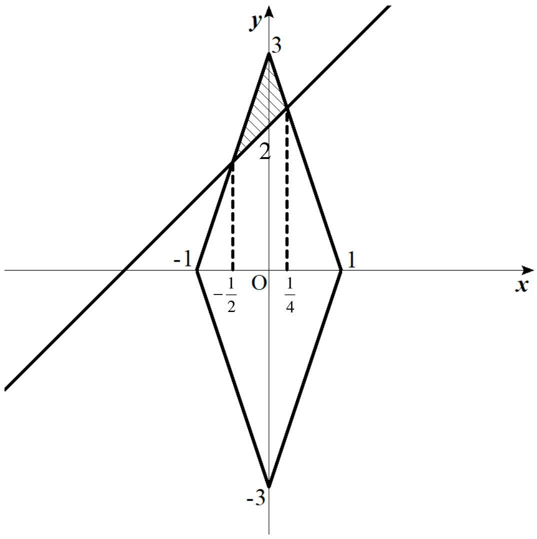


図 1

・ $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，$D$ は図 2 の斜線部．

①と $l$ の交点の $x$ 座標は

$-3x+3=x+\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{5}{8}$

③と $l$ の交点の $x$ 座標は

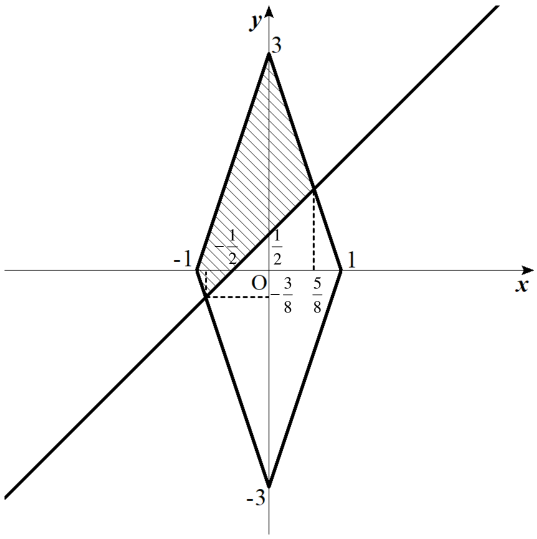


図 2

$-3x-3=x+\dfrac{1}{2}$

$x=-\dfrac{7}{8}$

よって $y$ 座標は

$y=-\dfrac{7}{8}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}$

よってこのとき $D$ の面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot\left(3-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot3-\dfrac{1}{2}\cdot\left|-\dfrac{1}{2}\right|\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)-(-1)\right\}\cdot\left|-\dfrac{3}{8}\right|$

$=\dfrac{25}{32}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{32}$

$=\underline{\dfrac{9}{4}}$ … $\boxed{(い)}$

(2)　$2x+y=k$　とおくと

$y=-2x+k$　… ④

$-3<p<3$　より，$D$ は $(0,3)$ を含むので, 直線④が $D$ を通るうちで $k$ が最大となるのは，④が $(0,3)$ を通るときであり, そのとき

$k=2\cdot0+3=3$

よって $2x+y$ の最大値は $\underline{3}$ … $\boxed{(う)}$

次に $k$ の最小値が $-\dfrac{11}{5}$ となるとき，すなわち図 3 のようになる場合を考える.

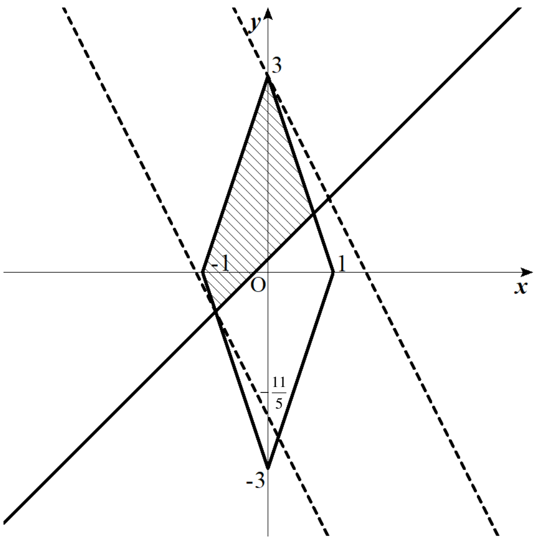


図 3

③これと 直線: $y=-2x-\dfrac{11}{5}$ の交点の $x$ 座標は

$-3x-3=-2x-\dfrac{11}{5}$

$x=-\dfrac{4}{5}$

$y$ 座標は

$y=-3\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)-3=-\dfrac{3}{5}$

よって，最小値が $-\dfrac{11}{5}$ となるのは $l$ が点 $\left(-\dfrac{4}{5},\ -\dfrac{3}{5}\right)$ を通るときより

$$-\frac{3}{5}=-\frac{4}{5}+p$$

$$p=\frac{1}{5} \quad \cdots \quad \boxed{（え）}$$

(3)　$mx+y=k$　とおくと

$y=-mx+k$　（$0<m$）… ⑤

$k$ の最大値が 5 であるから，そのとき

直線⑤は $(0,5)$ を通る．

$k$ の最小値が $-\dfrac{8}{3}$ であるから, そのとき

直線④は $\left(0,\ -\dfrac{8}{3}\right)$ を通る．

このどちらの場合も満たす $D$ は図 4 のようになるときである．

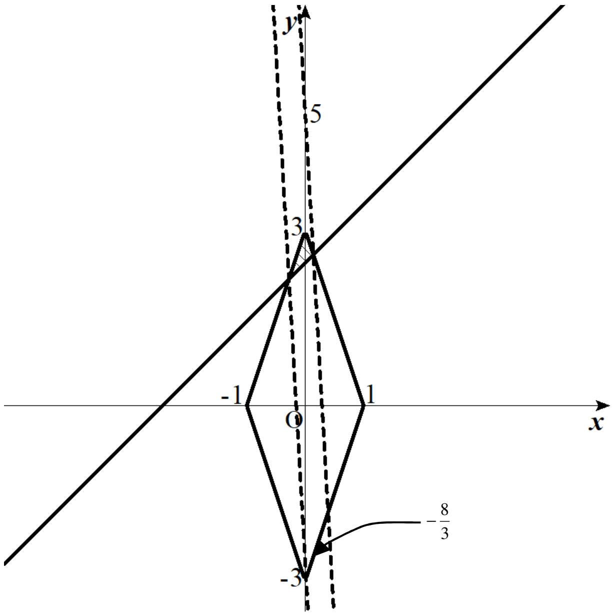


図 4

このとき，

・①と $l$ の交点の $x$ 座標は

$-3x+3=x+p$

$$x=\frac{3-p}{4}$$

$y$ 座標は

$$y=\frac{3-p}{4}+p=\frac{3+3p}{4}$$

であるから，

直線: $y=-mx+5$　がこの交点 $\left(\dfrac{3-p}{4},\ \dfrac{3+3p}{4}\right)$　を通るとき

$$\frac{3+3p}{4}=-m\cdot\frac{3-p}{4}+5$$

$3p+3m-pm=17$　… ⑥

・②と $l$ の交点の $x$ 座標は

$3x+3=x+p$

$$x=\frac{p-3}{2}$$

$y$ 座標は

$$y=\frac{p-3}{2}+p=\frac{3p-3}{2}$$

であるから，

直線: $y=-mx-\dfrac{8}{3}$　がこの交点 $\left(\dfrac{p-3}{2},\ \dfrac{3p-3}{2}\right)$　を通るとき

$$\frac{3p-3}{2}=-m\cdot\frac{p-3}{2}-\frac{8}{3}$$

$9p-9m+3pm=-7$ … ⑦

⑥, ⑦から

$m=\underline{\dfrac{87}{5}}$ … $\boxed{(お)}$,　$p=\underline{\dfrac{22}{9}}$ … $\boxed{(か)}$

# 3

(1) $\begin{cases} A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}} \sin 2x dx \\ B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}} \cos 2x dx \end{cases}$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}} \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( n e^{\frac{x}{n}} \right)' \sin 2x dx$$

$$= \left[ n e^{\frac{x}{n}} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n e^{\frac{x}{n}} \cos 2x \cdot 2 dx$$

$$= n\left( e^{\frac{\pi}{2n}} \sin \pi - e^0 \sin 0 \right) - 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}} \cos 2x dx$$

$$= -2nB_n \quad \cdots \text{①}$$

$$B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}} \cos 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( n e^{\frac{x}{n}} \right)' \cos 2x dx$$

$$= \left[ n e^{\frac{x}{n}} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n e^{\frac{x}{n}} \sin 2x \cdot (-2) dx$$

$$= n\left( e^{\frac{\pi}{2n}} \cos \pi - e^0 \cos 0 \right) + 2n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x}{n}} \sin 2x dx$$

$$= -n\left( e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) + 2nA_n \quad \cdots \text{②}$$

①に②を代入して

$$A_n = -2n\left\{ -n\left( e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) + 2nA_n \right\} = 2n^2\left( e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right) - 4n^2 A_n$$

$$\left(4n^2 + 1\right) A_n = 2n^2 \left( e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right)$$

$$A_n = \frac{2n^2\left( e^{\frac{\pi}{2n}} + 1 \right)}{4n^2 + 1} \quad \cdots \boxed{\text{(あ)}}$$

これを②へ代入して

$$B_n=-n\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)+2n\cdot\frac{2n^2\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)}{4n^2+1}=-\frac{n\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)}{4n^2+1}\quad\cdots\quad\boxed{（い）}$$

よって

$$nA_nB_n=n\cdot\frac{2n^2\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)}{4n^2+1}\cdot\frac{-n\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)}{4n^2+1}=-\frac{2n^4}{16n^4+8n^2+1}\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)^2$$

$$=-\frac{2}{16+\frac{8}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\left(e^{\frac{\pi}{2n}}+1\right)^2$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}nA_nB_n=-\frac{2}{16}\cdot\left(e^0+1\right)^2=\underline{-\frac{1}{2}}\quad\cdots\quad\boxed{（う）}$$

(2) $\begin{cases}C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\\ D_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\end{cases}$

$$C_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)'\sin^{n-1}xdx$$

$$=\left[-\cos x\sin^{n-1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{n-2}x-\sin^n x\right)dx$$

$$=(n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx\right)$$

$$=(n-1)\left(C_{n-2}-C_n\right)$$

より

$$nC_n=(n-1)C_{n-2}$$

$$C_n=\underline{\frac{n-1}{n}C_{n-2}}\quad\cdots\quad\boxed{（え）}\quad\cdots\quad③$$

$D_n$ についても全く同様で

$$D_n = \underline{\frac{n-1}{n}D_{n-2}} \quad \cdots \quad \boxed{（お）} \quad \cdots ④$$

③より

$$C_{2n} = \frac{2n-1}{2n}C_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}C_{2n-4}\cdots$$

と計算できるので

$$C_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot C_0$$

同様にして④より

$$D_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot D_1$$

$$D_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot D_1$$

であるから

$$C_{2n}D_{2n+1} = \underline{\frac{1}{2n+1}C_0D_1} \quad \cdots \quad \boxed{（か）}$$

$$C_{2n}D_{2n-1} = \underline{\frac{1}{2n}C_0D_1} \quad \cdots \quad \boxed{（き）}$$

$$C_0 = D_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$C_1 = D_1 = 1$$

ここで，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $0 \leqq \cos x \leqq 1$ であるから，自然数 $n$ に対して

$\cos^{n+1} x \leqq \cos^n x \leqq \cos^{n-1} x$ が常に成り立つので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x dx$$

$$D_{n+1} \leqq D_n \leqq D_{n-1}$$

このことと $\boxed{（か）}$，$\boxed{（き）}$ を利用すると，自然数 $m$ に対して

$$C_{2m}D_{2m+1} \leqq C_{2m}D_{2m} \leqq C_{2m}D_{2m-1}$$

$$\frac{1}{2m+1}C_0D_1 \leqq C_{2m}D_{2m} \leqq \frac{1}{2m}C_0D_1$$

$$\frac{2m}{2m+1}C_0D_1 \leqq 2mC_{2m}D_{2m} \leqq C_0D_1$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{2m+1}C_0D_1 = \lim_{m\to\infty}C_0D_1 = C_0D_1 = \frac{\pi}{2}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{m\to\infty} 2mC_{2m}D_{2m} = \frac{\pi}{2} \quad \cdots ⑤$$

同様にして

$$C_{2n-1}D_{2n} = \frac{1}{2n+1}C_1D_0$$

$$C_{2n-1}D_{2n-2} = \frac{1}{2n-1}C_1D_0$$

から

$$C_{2m-1}D_{2m} \leqq C_{2m-1}D_{2m-1} \leqq C_{2m-1}D_{2m-2}$$

$$\frac{1}{2m+1}C_1D_0 \leqq C_{2m-1}D_{2m-1} \leqq \frac{1}{2m-1}C_1D_0$$

$$\frac{2m-1}{2m+1}C_1D_0 \leqq (2m-1)C_{2m-1}D_{2m-1} \leqq C_1D_0$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2m-1}{2m+1}C_1D_0 = \lim_{m\to\infty}C_1D_0 = C_1D_0 = \frac{\pi}{2}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{m\to\infty}(2m-1)C_{2m-1}D_{2m-1} = \frac{\pi}{2} \quad \cdots ⑥$$

よって，⑤,⑥より，$n=2m$，$2m-1$　どちらの場合においても

$$\lim_{n\to\infty} nC_nD_n = \underline{\frac{\pi}{2}} \quad \cdots \boxed{（く）}$$

# 総 評

## 1

(1)は3次関数と接線に関わる問題．記述ではないため，最後の面積は $1/12$ 面積公式を利用して計算を簡単にして時間の短縮をしたい．

(2)は確率の問題．A に注目してできるかぎり計算をすくなくしたい．また，余事象や和事象，積事象の確率の計算を的確に利用して計算したい．

(3)虚数解をもつ4次方程式の問題．解と係数の関係式など，計算が乱雑にならないよう処理したい．最後の $p$ と $q$ の条件は差がついたと思われる．

## 2

線形計画法をテーマとした領域の問題．考え方自体はそこまで難しくないが，最後の答えの値が不安になる数字である．図を正確にイメージし，根気強く計算すればきちんと得点できる問題である．

## 3

前半は部分積分によって再度同じ定積分が出てくるので，連立方程式として処理をする問題で，入試対策のなかでは典型問題である．
後半はウォリスの公式と呼ばれる式が背景となっており，結果をきちんと覚えていれば $\boxed{\text{（き）}}$ まではそれほど難しくない．
$\boxed{\text{（く）}}$ に関しては，極限の対策がある程度きちんとしていれば，$\boxed{\text{（か）}}$ と $\boxed{\text{（き）}}$ の式を利用したはさみうちの原理ではないかというところまでは，思いつくであろうが，記述であることやどうつなげるかが意外と難しかったのではないだろうか．また，$n$ が奇数,偶数両方の場合で極限を調べなければ答案としては不十分のため，奇数の場合を記述せずに減点される答案で終わってしまった受験生もいそうである.そういった意味でも $\boxed{\text{（く）}}$ は難しい．