― 神奈川大学 ―

12 月 22 日　給費生試験　数学

解 答・解 説

1

(1) $\dfrac{2}{3-\sqrt{8}}=\dfrac{2\left(3+\sqrt{8}\right)}{\left(3-\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)}=\dfrac{6+2\sqrt{8}}{9-8}=6+\sqrt{32}$

$5^2<32<6^2$ より

$5<\sqrt{32}<6$ なので

$11<6+\sqrt{32}<12$

よって $\dfrac{2}{3-\sqrt{8}}$ の整数部分は$\underline{11}$ … (a)

(2) $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$ … ①

また

$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ より

$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0$

$\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|^2$ … ②

であるから，①,②より

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-\left|\vec{a}\right|^2}{2\left|\vec{a}\right|^2}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より $\theta=\underline{120°}$ … (b)

(3) $\begin{cases}x^2-2ax+6a=0\\x^2-2(a-1)x+3a=0\end{cases}$ … (※) が共通解tをもつとする．このとき

$\begin{cases}t^2-2at+6a=0 & \cdots ①\\t^2-2(a-1)t+3a=0 & \cdots ②\end{cases}$

が成り立つ

②－①より

$2t-3a=0$

$t=\dfrac{3}{2}a$

これを①へ代入して

$\dfrac{9}{4}a^2-3a^2+6a=0$

$-\dfrac{3}{4}a^2+6a=0$

$a^2-8a=0$

$a(a-8)=0$

$a=0, 8$

(ⅰ) $a=0$ のとき(※)は

$$\begin{cases} x^2=0 \\ x^2+2x=0 \end{cases}$$

となり，この共通解は0なので不適.

(ⅱ) $a=8$ のとき(※)は

$$\begin{cases} x^2-16x+48=0 \\ x^2-14x+24=0 \end{cases}$$

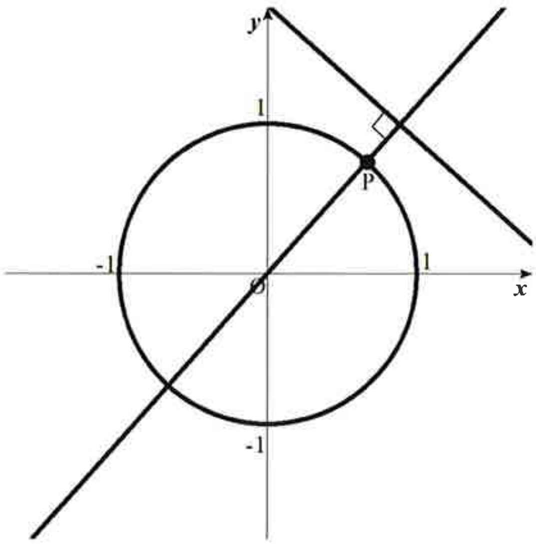
となり，この共通解は12なので適する.

以上から $a=\underline{8}$ … (c)

(4) $\begin{cases} C: x^2+y^2=1 \\ l: 2x+\sqrt{5}y-4=0 \end{cases}$ とする.

Cは中心$\mathrm{O}(0,0)$, 半径1の円であるから,
Pとlの最短距離は，右図のように, Oとlの距離から半径1を引いた長さに等しい.
よって求める最短距離は

$$\frac{\left|2\cdot0+\sqrt{5}\cdot0-4\right|}{\sqrt{2^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}-1=\frac{|-4|}{\sqrt{9}}-1=\underline{\frac{1}{3}} \cdots \text{(d)}$$



(5) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\Lambda+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\frac{k^2}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\log 2}\quad\cdots\ \text{(e)}$$

(6) $z^6=1$ … ① より

$\left|z^6\right|=1$

$|z|^6=1$

$|z|=1$

なので，$0\leqq\theta<2\pi$　として

$z=\cos\theta+i\sin\theta$

と表され，①とド・モアブルの定理より

$\cos 6\theta+i\sin 6\theta=1$

$0\leqq 6\theta<12\pi$　より，これを満たすのは

$6\theta=0,2\pi,4\pi,6\pi,8\pi,10\pi$

$\theta=0,\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2}{3}\pi,\pi,\dfrac{4}{3}\pi,\dfrac{5}{3}\pi$

であり，このうち，zの実部，虚部とも負になるのは $z=\dfrac{4}{3}\pi$　なので

$z=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$

より

$$z^{2020}=\left(z^6\right)^{336}\cdot z^4=1\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)^4=\cos\frac{16}{3}\pi+i\sin\frac{16}{3}\pi$$

$$=\cos\left(\frac{4}{3}\pi+4\pi\right)+i\sin\left(\frac{4}{3}\pi+4\pi\right)$$

$$=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

$$=\underline{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}\ \cdots\ \text{(f)}$$

$$\frac{1}{z^{2020}}=\left(z^{2020}\right)^{-1}=\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)^{-1}=\cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

であるから，$\theta=\underline{\frac{2}{3}\pi}$ $\cdots$ (g)

$\boxed{2}$

(1) $f(x)=xe^{-x}$ とおくと

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

であるから，C の (t, te^{-t}) における接線の方程式は

$y=f'(t)(x-t)+te^{-t}=e^{-t}(1-t)(x-t)+te^{-t}=\underline{e^{-t}(1-t)x+t^2e^{-t}}$ … ①

(2) ①が点 $(a,0)$ を通るとき

$0=e^{-t}(1-t)a+t^2e^{-t}$ を満たし，$e^t>0$ をこの両辺にかけ整理すると

$0=(1-t)a+t^2$

$t^2-at+a=0$ … ②

接線がただ1つとなるのは，②を満たす実数 t がただ1つとなるとき，すなわち，②を t の二次方程式と見たときに重解をもつときであるから，②の判別式を D として，

$D=0$

となるときより

$a^2-4\cdot1\cdot a=0$

$a(a-4)=0$

$0<a$ より $a=\underline{4}$

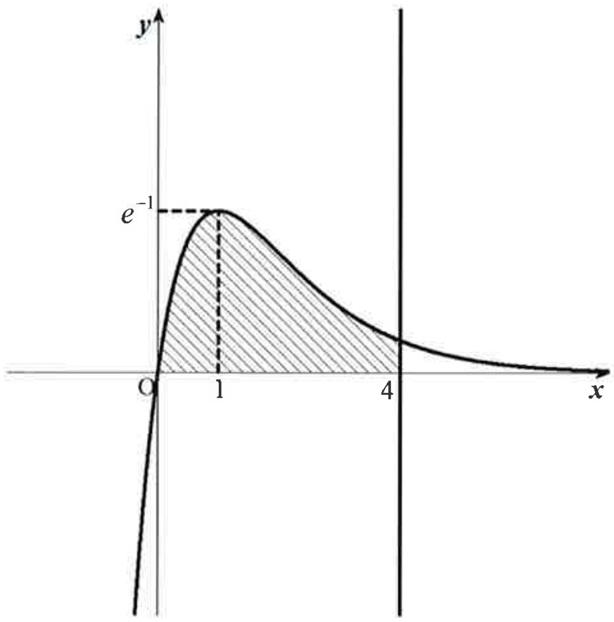
(3) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

であるから，$f(x)$ の増減は右図.

また $0<x$ において $f(x)>0$

であるから，求める面積を S とすると

x		0		1	
$f'(x)$	+	+	+	0	−
$f(x)$	↗	0	↗	e^{-1}	↘



$S=\int_0^4 xe^{-x}dx$

$=\int_0^4 x\cdot(-e^{-x})'dx$

$=\left[-xe^{-x}\right]_0^4-\int_0^4 1\cdot(-e^{-x})dx$

$=-4e^{-4}+\int_0^4 e^{-x}dx$

$=-4e^{-4}+\left[-e^{-x}\right]_0^4$

$=-4e^{-4}+\{(-e^{-4})-(-1)\}$

$=\underline{-5e^{-4}+1}$

$\boxed{3}$

(1) 各回赤玉が取り出される確率は$\dfrac{1}{3}$（赤玉以外が取り出される確率は$\dfrac{2}{3}$）

よって

$$p_1=\underline{\frac{1}{3}}$$

$$p_2={}_2C_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\frac{4}{9}}$$

(2) 試行を$(n+1)$回続けたとき，赤玉が奇数回取り出されるのは

（i）n回までで赤玉が奇数回取り出され，$(n+1)$回目で赤玉以外が取り出される．

（ii）n回までで赤玉が偶数回取り出され，$(n+1)$回目で赤玉が取り出される．

場合が考えられるので

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{2}{3}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{3}=\underline{\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}}$$

(3) (2)より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

であり，

$$p_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$$

より

$$p_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\underline{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

(4) (3)より

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\underline{\frac{1}{2}}$$

総 評

1

(1), (2)は落としてはいけない問題.
(3)については，$a=0$, 8のうち，共通解が0にならない方をきちんと確認し，不適当な方をきちんと削除することを忘れないようにしたい.
(4)はPの座標を文字でおくなどして求めようとすると計算がとんでもないことになる．この問題を一番簡単に解く方法がすぐ思いついたかどうかは差がついたのではないだろうか.
(5)は区分求積の典型問題.落とせない.
(6)は複素数平面の頻出問題であるが，苦手な受験生も多いと思われる.

2

(1)は計算ミスさえしなければ特に問題なく解けるであろう微分の基本問題.
(2)は接線の本数が接点のx座標(t)の個数と一致することを利用する問題．当初定数分離を利用して解答していたが修正した．tの2次方程式になるので判別式で簡単に解ける.
(3)は(2)が正しく求められていれば，部分積分の基本的な計算問題であるから難しくない．尚，$y=f(x)$ のグラフを正確に考える際は，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$ を示す必要があるが，本問は少なくとも $a<x$ においてx軸と交わることがない($f(x)>0$)ことさえ述べれば答案として問題はないであろう.

3

確率漸化式の基本問題および極限の基本計算であり，両単元の基本が抑えられていればとくに困るところはないはずで,今回最も簡単な大問であったのではないだろうか.
受験生を混乱させる目的なのか，白玉と青玉を分けた意味は分からない.