# ― 千葉工業大学 ―

## 1月31日　A日程　数学

### 解答・解説

## 1.

(1) $(1-2i)z = 23-6i$

$$z = \frac{23-6i}{1-2i} = \frac{(23-6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{35+40i}{5} = \underline{7+8i} \quad \cdots \text{ [ア,イ]}$$

(2) 『男女男女男女』または『女男女男女男』のパターンでの並び方が考えられるので

$2\times 3!\cdot 3! = \underline{72}$ 通り … [ウエ]

(3) $$\frac{{}_1C_1\cdot{}_4C_1\cdot{}_5C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{1\cdot 4\cdot 5}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}} = \underline{\frac{1}{6}} \quad \cdots \text{ [オ,カ]}$$

(4) 正弦定理より

$$\frac{2}{\sin 135^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{4}} \quad \cdots \text{ [キ,ク]}$$

(5) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^{x-1} - 9\left(\frac{1}{4}\right)^x + 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^x - 9\left(\frac{1}{4}\right)^x + 1 = 0$$

$$8\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^2 - 9\left(\frac{1}{4}\right)^x + 1 = 0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1\right\}\left\{8\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1\right\} = 0$$

よって

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 1,\ \frac{1}{8}$$

であり，

$$\begin{cases} 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0 \\ \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

なので　$x = \underline{0,\ \frac{3}{2}}$　… [ケ,コ,サ]

(6) 求める公差を $d$ とすると，

$$\frac{3\{2\cdot(-10)+(3-1)d\}}{2} = \frac{10\{2\cdot(-10)+(10-1)d\}}{2}$$

$$3(-20+2d) = 10(-20+9d)$$

$$-60+6d = -200+90d$$

$$84d = 140$$

$$d = \frac{5}{3}$$

よって公差は $\underline{\frac{5}{3}}$　… [シ,ス]

(7) ・$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 5$　より

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 5^2$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 25 \quad \cdots ①$$

・$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 7$　より

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 7^2$$

$$\left|\vec{a}\right|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 49 \quad \cdots ②$$

②－①より

$$4\vec{a}\cdot\vec{b} = 24$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underline{6}$　… [セ]

①＋②より

$$2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2=74$$

$$\left|\vec{b}\right|^2=37-\left|\vec{a}\right|^2=37-3^2=28$$

よって

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{28}=\underline{2\sqrt{7}}\ \cdots\ [ソ,タ]$$

(8) $$\int_{-1}^{2}x^2\left(2|x|+x\right)dx=\int_{-1}^{0}x^2\left(-2x+x\right)dx+\int_{0}^{2}x^2\left(2x+x\right)dx$$

$$=-\int_{-1}^{0}x^3dx+3\int_{0}^{2}x^3dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{0}+3\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2}$$

$$=-\frac{1}{4}(0-1)+\frac{3}{4}(16-0)$$

$$=\underline{\frac{49}{4}}\ \cdots\ [チツ,テ]$$

# 2.

（1） $F=12\sqrt{2}\sin 3x+4\sqrt{6}\cos\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$$\cos\left(3x+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos 3x\cos\frac{2}{3}\pi-\sin 3x\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x$$

より

$$F=12\sqrt{2}\sin 3x+4\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x\right)$$

$$=12\sqrt{2}\sin 3x-2\sqrt{6}\cos 3x-6\sqrt{2}\sin 3x$$

$$=\underline{6\sqrt{2}\sin 3x-2\sqrt{6}\cos 3x}\ \cdots\ [ア,イ,ウ,エ]$$

$$=\underline{4\sqrt{6}\sin\left(3x-\frac{1}{6}\pi\right)}\ \cdots\ [オ,カ,キ,ク]\ \cdots\ ①$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$0\leqq 3x\leqq\frac{3}{2}\pi$$

$$0\leqq 3x-\frac{1}{6}\pi\leqq\frac{4}{3}\pi$$

であるから，①より $3x-\frac{1}{6}\pi=\frac{4}{3}\pi$ のとき $F$ は最小値をとり，その値は

$$4\sqrt{6}\sin\frac{3}{4}\pi=4\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{-6\sqrt{2}}\ \cdots\ [ケコ,サ]$$

(2)　$G=\log_2(2x)\cdot\log_2\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\cdot\log_2\left(\dfrac{8}{x}\right)$ ⋯ ①

真数条件より $0<x$ で，この範囲において $G=0$ となるのは，

$$\begin{cases} 2x=1 \\ \dfrac{x^2}{2}=1 \\ \dfrac{8}{x}=1 \end{cases}$$ すなわち $x=\dfrac{1}{2},\sqrt{2},8$ のときである．

$\dfrac{1}{2}<\sqrt{2}<8$ より，$G=0$ となる最小の $x$ は

$x=\underline{\dfrac{1}{2}}$ ⋯ [シ,ス]

$t=\log_2 x$ とおくと

・$\log_2(2x)=\log_2 2+\log_2 x=t+1$

・$\log_2\left(\dfrac{x^2}{2}\right)=\log_2 x^2-\log_2 2=2\log_2 x-1=2t-1$

・$\log_2\left(\dfrac{8}{x}\right)=\log_2 8-\log_2 x=-t+3$

であるから，①より

$G=(t+1)(2t-1)(-t+3)$

$\quad=\underline{-2t^3+5t^2+4t-3}$ ⋯ [セソ,タ,チ,ツ]

$G=g(t)$ とすると

$g'(t)=-6t^2+10t+4$

$\qquad=-2(3t^2-5t-2)$

$\qquad=-2(3t+1)(t-2)$

| $t$ | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(t)$ | $g(-1)$ | ↘ | $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ | ↗ | $g(2)$ | ↘ |

であるから，$\dfrac{1}{2}\leqq x$ すなわち $-1\leqq t$ における $g(t)$ の増減は上のようになる．

・$g(-1)=2+5-4-3=0$

・$g(2)=-16+20+8-3=9$

であり，

$t=2$ すなわち $\log_2 x=2$ となるのは $x=4$ のときであるから，$G$ は

$x=\underline{4}$ ⋯ [テ] のとき最大値$\underline{9}$ ⋯ [ト] をとる．

# 3.

(1)　$P(x)$ を $x^2-4$ で割ったときの商を $Q_1$ とすると

$P(x)=(x^2-4)Q_1+8x+3$ … ①

と表せるので

$P(-2)=-16+3=\underline{-13}$ … [アイウ]

さらに $P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_2$ とすると

$P(x)=(x+2)(x-3)Q_2+6x+k$ … ②

と表せ，$P(-2)=-13$ であったから

$-12+k=-13$

$k=\underline{-1}$ … [エオ]

よって②は

$P(x)=(x+2)(x-3)Q_2+6x-1$ … ②'

$P(x)$ を $(x^2-4)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_3$，余りを $R(x)$ とおくと

$P(x)=(x^2-4)(x-3)Q_3+R(x)=(x-2)(x+2)(x-3)Q_3+R(x)$ … ③

このとき $R(x)$ の次数は2次以下で，②' と③より，$P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの余り $6x-1$ は，$R(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割った余りでもあるので，その商を $a$ とすると

$R(x)=(x+2)(x-3)a+6x-1$ … ④

と表せる．

ここで，①より

$P(2)=16+3=19$

であり，これと③から

$P(2)=R(2)$

なので

$R(2)=19$

これと④から

$-4a+12-1=19$

$a=-2$

これを④へ代入して

$R(x)=-2(x+2)(x-3)+6x-1=-2(x^2-x-6)+6x-1=-2x^2+8x+11$

よって求める余りは

$\underline{-2x^2+8x+11}$ … [カキ,ク,ケコ]

(2)　球面$S$が$xy$平面と交わってできる円の中心は$(a,b,0)$であり，これが2点$(1,0,0)$と$(0,2,0)$を通る直線上にあるので，その直線の方向ベクトルとして$\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$が考えられるから，$t$を実数として

$$\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+1\\-2t\\0\end{pmatrix}$$

と表すことができる．よって

$$\begin{cases}a=t+1 & \cdots ①\\ b=-2t & \cdots ②\end{cases}$$

であり，①から

$t=a-1$

なので，これを②へ代入して

$b=-2(a-1)=\underline{-2a+2}$　…　[サシ,ス]

と表される．

よって，球$S$の中心は$(a,\ -2a+2,c)$

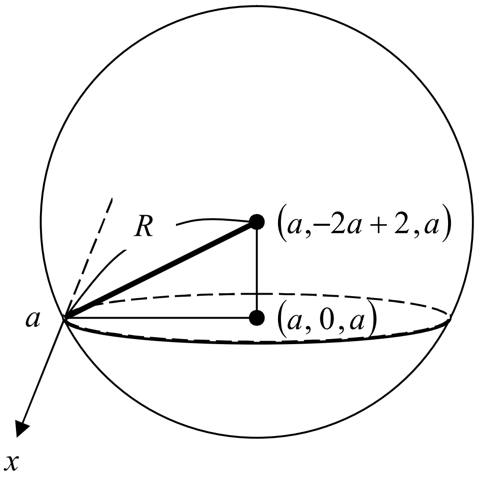
と表すことができる．

さらに球$S$が$zx$平面と交わってできる円の中心は$(a,0,c)$であり，これが$x$軸と$z$軸の両方に接するので，

$c=a$　…　③

であり，またこの円の半径は$a$である．

よって$S$の半径$R$は，三平方の定理を用いて




$$R=\sqrt{|-2a+2|^2+a^2}=\underline{\sqrt{5a^2-8a+4}}\ \cdots\ [セ,ソ,タ]$$

$$=\sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$$

となるので，$R$は$a=\dfrac{4}{5}$のとき，最小となりその値は

$$\sqrt{\frac{4}{5}}=\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\ \cdots\ [チ,ツ,テ]$$

また，③からそのとき

$c = a = \underline{\dfrac{4}{5}}$ … [ト,ナ]

# 4.

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ とおくと

$f'(x)=\frac{1}{2}x$ であるから，

$l$ の方程式は

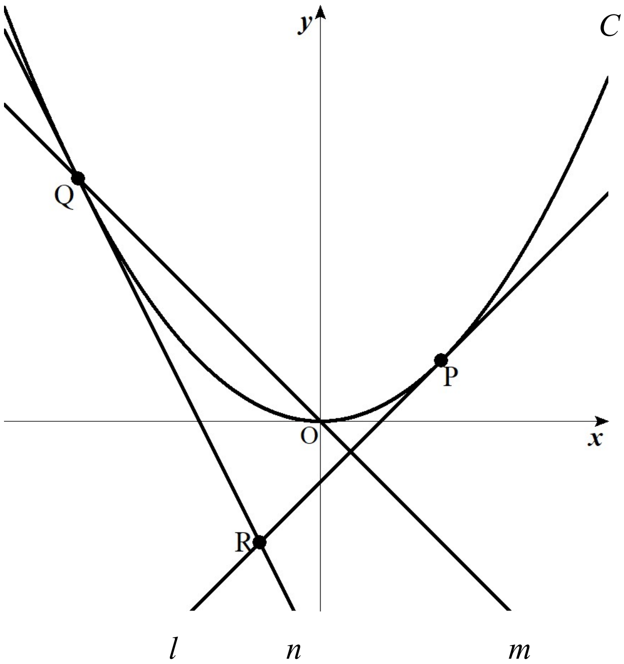
$$y=f'(p)(x-p)+\frac{1}{4}p^2$$

$$=\frac{1}{2}p(x-p)+\frac{1}{4}p^2$$

$$=\underline{\frac{1}{2}px-\frac{1}{4}p^2}\ \cdots\ [\text{ア,イ,ウ,エ}]$$

$0<p$ であるから，$m$ の方程式は

$$y=-\frac{2}{p}x\ \cdots\ ①$$




よって，$l$ と $m$ の交点の $x$ 座標は

$$\frac{1}{2}px-\frac{1}{4}p^2=-\frac{2}{p}x$$

$$2p^2x-p^3=-8x$$

$$(2p^2+8)x=p^3$$

$$x=\frac{p^3}{2(p^2+4)}$$

よって交点の $y$ 座標は①より

$$y=-\frac{2}{p}\cdot\frac{p^3}{2(p^2+4)}=\underline{-\frac{p^2}{p^2+4}}\ \cdots\ [\text{オ}]$$

(2) $C$ と $m$ の交点の $x$ 座標は

$$\frac{1}{4}x^2=-\frac{2}{p}x$$

$$px^2=-8x$$

$$px^2+8x=0$$

$$x(px+8)=0$$

$$x=0,\ -\frac{8}{p}$$

であるから，Qの $x$ 座標は $\underline{\frac{-8}{p}}$ … [カキ]

よって，直線 $n$ の方程式は

$$y=f'\left(-\frac{8}{p}\right)\left(x+\frac{8}{p}\right)+f\left(-\frac{8}{p}\right)=-\frac{4}{p}\left(x+\frac{8}{p}\right)+\frac{16}{p^2}=-\frac{4}{p}x-\frac{16}{p^2}$$

であるから，$l$ と $n$ の交点 R の $x$ 座標は

$$\frac{1}{2}px-\frac{1}{4}p^2=-\frac{4}{p}x-\frac{16}{p^2}$$

$$2p^3x-p^4=-16px-64$$

$$(2p^3+16p)x=p^4-64$$

$$2p(p^2+8)x=(p^2+8)(p^2-8)$$

$$x=\frac{p^2-8}{2p}$$

なので，R の $y$ 座標は

$$y=\frac{1}{2}p\cdot\frac{p^2-8}{2p}-\frac{1}{4}p^2=\underline{-2}\ \cdots\ [クケ]$$

(3)　(2)より，Q の $y$ 座標は

$$y=\frac{1}{4}\left(\frac{-8}{p}\right)^2=\frac{16}{p^2}$$

なので

$$\mathrm{P}\left(p,\frac{1}{4}p^2\right),\quad \mathrm{Q}\left(-\frac{8}{p},\frac{16}{p^2}\right),\ \mathrm{R}\left(\frac{p^2-8}{2p},-2\right)$$

よって，$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$　となるとき

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{QR}^2$$

$$\left(p+\frac{8}{p}\right)^2+\left(\frac{1}{4}p^2-\frac{16}{p^2}\right)^2=\left(-\frac{8}{p}-\frac{p^2-8}{2p}\right)^2+\left(\frac{16}{p^2}+2\right)^2$$

$$\left(\frac{p^2+8}{p}\right)^2+\left(\frac{p^4-64}{4p^2}\right)^2=\left(\frac{-p^2-8}{2p}\right)^2+\left(\frac{16+2p^2}{p^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{p^2+8}{p}\right)^2+\frac{1}{16}\left\{\frac{(p^2-8)(p^2+8)}{p^2}\right\}^2=\frac{1}{4}\left(\frac{p^2+8}{p}\right)^2+4\left(\frac{p^2+8}{p^2}\right)^2$$

$$\frac{(p^2+8)^2}{p^2}+\frac{1}{16}\cdot\frac{(p^2-8)^2(p^2+8)^2}{p^4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(p^2+8)^2}{p^2}+4\cdot\frac{(p^2+8)^2}{p^4}$$

両辺 $\dfrac{16p^2}{(p^2+8)^2}$ をかけて

$16p^2+(p^2-8)^2=4p^2+64$

$16p^2+p^4-16p^2+64=4p^2+64$

$p^4-4p^2=0$

$p^2(p-2)(p+2)=0$

$0<p$ より $p=2$

よって，△PQR は，$p=\underline{2}$ … [コ] のとき $\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$ の二等辺三角形となる.

(4) (3)より，$p=2$ のとき $\mathrm{R}\left(\dfrac{p^2-8}{2p},\ -2\right)$ の $x$ 座標は

$\dfrac{2^2-8}{2\cdot 2}=-1$

である.

よってこのとき $\mathrm{R}(-1,\ -2)$ となっている.

$\mathrm{R}(1,\ -2)$ となるのは

$\dfrac{p^2-8}{2p}=1$ を解いて

$p^2-8=2p$

$p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

$0<p$ より $p=4$ のとき.

よって $p=2$ のときの R と，$p=\underline{4}$ … [サ]

のときの R は $y$ 軸に関して対称. である.

$p=2$ のときの $l$ を $y=g_2(x)$,

$p=4$ のときの $l$ を $y=g_4(x)$

とおくと,

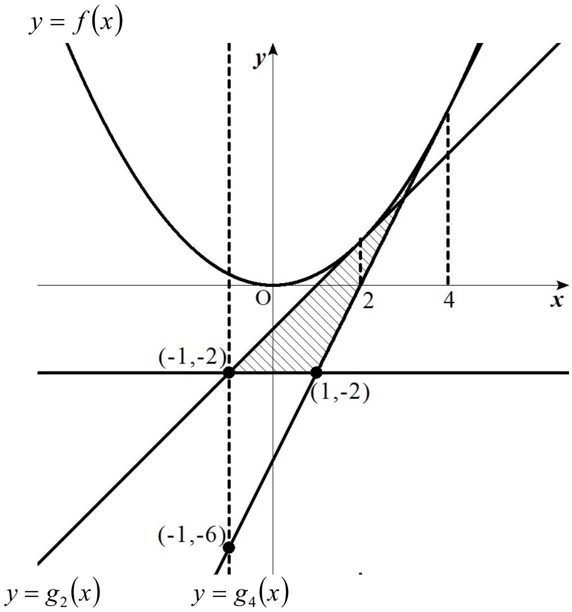
$$\begin{cases} g_2(x)=x-1 \\ g_4(x)=2x-4 \end{cases}$$

であり，$2\leqq p\leqq 4$ における

線分 PR が通過する図形は右図

の斜線部の図形である.

よって斜線部の面積を $S$ とすると



$$S=\int_{-1}^{4}\{f(x)-g_4(x)\}dx-\int_{-1}^{2}\{f(x)-g_2(x)\}dx-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4$$
$$=\frac{125}{12}-\frac{27}{12}-4$$
$$=\underline{\frac{25}{6}}\ \cdots\ [シ,ス,セ]$$

積分計算は 1/3 公式
を利用!

## 総 評

### 1.
どれも落としてはならない基本問題である.

### 2.
(1) は三角関数の加法定理と合成を使った基本問題. (2) は対数の変形処理と微分によって増減を調べる基本問題. やはり落としてはいけない.

### 3.
(1) は剰余の定理の応用問題. これはやや苦手な受験生がそこそこいるであろう問題で差がついたと思われる. (2) は空間における球と平面のなす円の問題. イメージができればそこまで難しい問題ではないが、空間図形に苦手意識がある受験生は難しく感じるかもしれない.

### 4.
二次関数の接線や法線，ならびに軌跡の複合問題. (2) まではそこまで難しくないのだが，(3) の計算ので時間をロスした受験生もいるのではないだろうか. また，(4) の軌跡が描く図形がすんなりイメージでき，かつその計算が上手にできたかも大きい.

**1,2** はそこまで難しくないが，全体としては 80 分という試験時間を考えると, 時間が足りない受験生もいたと思われる.