― 千葉工業大学 ―

2月1日　A日程　数学

解答・解説

1.

(1) $\dfrac{8+\sqrt{-8}}{1+\sqrt{-2}}=\dfrac{8+2\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}=\dfrac{2\left(4+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)}{\left(1+\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)}=\dfrac{2\left(6-3\sqrt{2}i\right)}{3}=\underline{4-2\sqrt{2}i}$ … [ア,イ]

(2) $y=f(x)=x^2-6x+c$

とすると

$$f(x)=(x-3)^2-9+c$$

であるから，$1\leqq x\leqq 4$ において $x=1$ で最大値をとる．

この最大値が 7 なので

$f(1)=7$

$1^2-6\cdot 1+c=7$

$c=\underline{12}$ … [ウエ]

(3) 求める座標は

$\left(\dfrac{1\cdot 3+3\cdot 7}{3+1},\ \dfrac{1\cdot 19+3\cdot(-9)}{3+1}\right)$ すなわち $\underline{(6,\ -2)}$ … [オ,カキ]

(4) 対偶の命題は

「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」

なので①　… [ク]

(5) $\begin{cases} C_1: x^2+y^2-6x+8y+21=0 \\ C_2: x^2+y^2=r^2 \end{cases}$

$$C_1:(x-3)^2+(y+4)^2=4$$

より，

C_1 は中心 $(3,\ -4)$ で半径 2 の円，C_2 は中心 $(0,0)$ で半径 r の円である．

C_1 と C_2 の中心間の距離は

$$\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$$

なので，C_1 と C_2 が共有点をもつ r の範囲は

$5-2\leqq r\leqq 5+2$

$\underline{3 \leqq r \leqq 7}$ … [ケ,コ]

(6) $S_n = n^2 + 7n + 1 - 5^n$ （$n = 1, 2, 3, \Lambda$ ）

より

$a_1 = S_1 = 1^2 + 7 \cdot 1 + 1 - 5^1 = 4$

$2 \leqq n$において

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 7n + 1 - 5^n - \left\{(n-1)^2 + 7(n-1) + 1 - 5^{n-1}\right\}$$
$$= n^2 + 7n + 1 - 5 \cdot 5^{n-1} - \left(n^2 + 5n - 5 - 5^{n-1}\right)$$
$$= 2n + 6 - 4 \cdot 5^{n-1}$$

これは $a_1 = 4$ も満たす.

よって

$a_n = \underline{2n + 6 - 4 \cdot 5^{n-1}}$ … [サ,シ,ス]

(7) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ より

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 = -21$$

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{42}$$

なので

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{w}\right|} = \frac{-21}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{42}} = -\frac{21}{14\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $\theta = \underline{\frac{5}{6}}\pi$ … [セ,ソ]

(8) $$\int_0^4 \left|x(x-3)\right| dx = -\int_0^3 x(x-3)dx + \int_3^4 x(x-3)dx$$
$$= -\int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)dx + \int_3^4 \left(x^2 - 3x\right)dx$$
$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$= -\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(3^3-0^3\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(3^2-0^2\right)\right\}+\left\{\frac{1}{3}\cdot\left(4^3-3^3\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(4^2-3^2\right)\right\}$$

$$= -\left(9-\frac{27}{2}\right)+\left(\frac{37}{3}-\frac{21}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{19}{3}} \cdots \ [\text{タチ,ツ}]$$

2.

（1）D_1 の平均が5より

$$\frac{a+b+c+d}{4}=5$$

$a+b+c+d=\underline{20}$ … [アイ]

よって，D_2 の平均は

$$\frac{a+b+c+d+10}{5}=\frac{20+10}{5}=\underline{6}$$ … [ウ]

D_1 の分散が14ならば

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-5^2=14$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}=39$$

$a^2+b^2+c^2+d^2=\underline{156}$ … [エオカ]

となり，D_2 の分散は

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+10^2}{5}-6^2=\frac{156+100}{5}-36=51.2-36=\underline{15.2}$$ … [キク.ケ]

（2）$y=\log_2(16x^2)=\log_2 16+\log_2 x^2=2\log_2 x+4$

なので　$t=\log_2 x$　とおくと

$y=\underline{2t+4}$ … [コ, サ] … ①

さらに

$$x^y=\frac{1}{8x}$$

を満たすとき，この両辺は正より

$$\log_2 x^y=\log_2\frac{1}{8x}$$

$y\log_2 x=-\log_2 8x$

$y\cdot t=-(\log_2 8+\log_2 x)$

$ty=-3-t$

これに①を代入して

$t(2t+4)=-3-t$

$2t^2+5t+3=0$

$(t+1)(2t+3)=0$

$$t=-1,\ -\frac{3}{2}$$

$t=\log_2 x$ であったから $x=2^t$ より

$x=2^{-1},\ 2^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\underline{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ $\cdots$ [シ,ス,セ,ソ]

3.

(1)　$f(x)=-2x^2-4x+6$　とする．

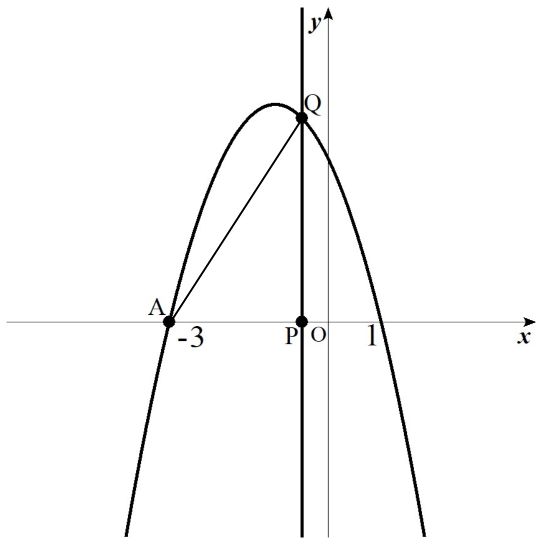
C と x 軸の交点の x 座標は，　$f(x)=0$　の実数解より，

$-2x^2-4x+6=0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=\underline{-3,1}$　$\cdots$　[アイ,ウ]



A$(-3,0)$，　P$(t,0)$，　Q$(t,f(t))$　（$-3<t<1$）より，

$$S=\frac{1}{2}(t+3)\cdot f(t)$$
$$=\frac{1}{2}(t+3)(-2t^2-4t+6)$$
$$=-(t+3)(t^2+2t-3)$$
$$=-(t^3+5t^2+3t-9)$$
$$=\underline{-t^3-5t^2-3t+9}$$　$\cdots$　[エ,オ,カ]

$S(t)=-t^3-5t^2-3t+9$　とおくと

$S'(t)=-3t^2-10t-3$

$\quad=-(3t^2+10t+3)$

$\quad=-(t+3)(3t+1)$

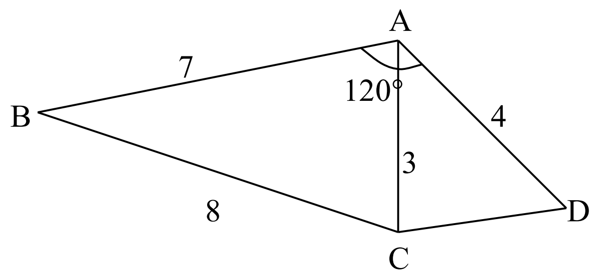
であるから，　$-3<t<1$　における

$S(t)$の増減は右のようになるので S の最大値は

t	-3		$-\frac{1}{3}$		1
$S'(t)$		$+$		$-$	
$S(t)$		↗	最大	↘	

$$S\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\left(-\frac{1}{3}\right)^2-3\left(-\frac{1}{3}\right)+9=\underline{\frac{256}{27}}$$　$\cdots$　[キクケ,コサ]

(1)　△ABC における余弦定理から



$$\cos\angle BAC=\frac{7^2+3^2-8^2}{2\cdot7\cdot3}=\frac{-6}{2\cdot7\cdot3}=\underline{\frac{-1}{7}}\quad\cdots\ [シス,セ]$$

よって

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sin\angle CAD&=\sin(120^\circ-\angle BAC)\\&=\sin120^\circ\cos\angle BAC-\cos120^\circ\sin\angle BAC\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}\\&=\underline{\frac{3\sqrt{3}}{14}}\quad\cdots\ [ソ,タ,チツ]\end{aligned}$$

よって，四角形 ABCD の面積は，△ABC と△ADC の面積の和より

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot AC\cdot\sin\angle CAD$$

$$=\frac{1}{2}\cdot7\cdot3\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}+\frac{1}{2}\cdot4\cdot3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$=\underline{\frac{51\sqrt{3}}{7}}\quad\cdots\ [テト,ナ,ニ]$$

4.

(1) $(x_2, y_2)=(2,0)$ となるのは，最初の2回で，2回とも奇数の目が出たときより，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\frac{1}{4}} \cdots [ア,イ]$$

$(x_2, y_2)=(0,0)$ となるのは，最初の2回で，

・奇数の目と2の目が一回ずつ出る

・4の目と6の目が一回ずつ出る

のいずれかのときより，その確率は

$${}_2C_1\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+{}_2C_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{8}{36}=\underline{\frac{2}{9}} \cdots [ウ,エ]$$

(2) $(x_3, y_3)=(1,0)$ となるには

・$\underline{a=2, b=1, c=0, d=0}$ $\cdots$ [オ,カ,キ]

・$\underline{a=1, b=0, c=1, d=1}$ $\cdots$ [ク,ケ,コ,サ]

の場合が考えられる.

よってそのようになる確率は

$$\frac{3!}{2!}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+3!\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{45}{6^3}=\underline{\frac{5}{24}} \cdots [シス,セ]$$

(3) (2)同様に考えると

$(x_5, y_5)=(1,0)$ となるのは

・$a=3, b=2, c=0, d=0$

・$a=2, b=1, c=1, d=1$

・$a=1, b=0, c=2, d=2$

の場合が考えられる.

よってそのようになる確率は

$$\frac{5!}{3!2!}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{5!}{2!}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5!}{2!2!}\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$=10\cdot\frac{27}{6^5}+60\cdot\frac{9}{6^5}+30\cdot\frac{3}{6^5}$$

$$=\frac{900}{6^5}$$

$=\dfrac{25}{216}$ … [ソタ,チツテ]

(4) $(x_3, y_3)=(1, 0)$ かつ $(x_5, y_5)=(1, 0)$ となるのは $(x_3, y_3)=(1, 0)$ のあとの2回が

・ $a=1, b=1, c=0, d=0$

・ $a=0, b=0, c=1, d=1$

のいずれかのときより，そのようになる確率は

$$\frac{5}{24}\cdot\left({}_2C_1\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+{}_2C_1\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{24}\cdot\frac{2}{9}=\frac{5}{108}$$

よって，$(x_5, y_5)=(1, 0)$ であったとき $(x_3, y_3)=(1, 0)$ である条件付確率は

$$\frac{\frac{5}{108}}{\frac{25}{216}}=\frac{2}{5}$$ … [ト,ナ]

総 評

1.

基本問題の小問集合．教科書レベルの内容がほとんどなので落とさないようにしたい．

2.

(1) は平均と分散の問題．標準レベルで頻出問題だが，意外と分散の処理が苦手な受験生が多い問題でもあると個人的に感じている．
(2) は対数の計算処理と置き換えの問題で，これも誘導があるのでそこまで難しくないはずである．

3.

(1) は二次関数と図形の問題で，その面積の最大を微分による増減で求める複合問題であるが，さほど難しいところはない．
(2) は四角形の面積を，2 つの三角形に分けて，それぞれの面積の和で求める問題．これもそれほど難しくはないが，しいて挙げれば $\sin\angle\mathrm{CAD}$ を加法定理を利用して求めるところをすぐ思いつくかであろうか？

4.

点の移動の確率の問題．(3) を見落としなく (2) 同様に解ければ，(3) までは難しくない．(4) も計算はそこまで難しくないのだが，条件付き確率をそもそもどう計算するか曖昧な受験生が多いと個人的に感じるので，そういった意味では(4)は差がついたのではないかと思う．

全体的に見て数学はそこまで難しい問題はなく，公式や定理を覚えて，基礎固めがしっかりできていれば高得点が十分狙える問題ばかりである．