― 芝浦工業大学 ―

2 月 3 日　前期日程　数学

解 答・解 説

1.

(1) $z\bar{z}=1$ より

$|z|^2=1$

すなわち

$|z|=1$

であり，これと $|z-\alpha|=1$ が同値で，α は定数より $\alpha=\underline{0}$ … $\boxed{（ア）}$

(2) $f(x)=ax^2-2(a+2)x+2a+1$（$a\neq 0$）

すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ となるには，$y=f(x)$ のグラフが

（ i ）下に凸の放物線である．

（ ii ）x 軸と共有点をもたないか，接する．

をともに満たせばよい．

（ i ）となるのは

$0<a$ … ①

のとき．

（ ii ）となるのは，$f(x)=0$ の判別式を D としたとき

$D/4\leqq 0$

となるときより

$\{-(a+2)\}^2-a\cdot(2a+1)\leqq 0$

$-a^2+3a+4\leqq 0$

$a^2-3a-4\geqq 0$

$(a+1)(a-4)\geqq 0$

$a\leqq -1, 4\leqq a$ … ②

①, ②より，求める a の値の範囲は $4\leqq a$ … $\boxed{（イ）}$

さらに，$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつには，まず $D/4>0$ すなわち

$-1<a<4$ … ③

また，$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=\dfrac{a+2}{a}$ であるから，

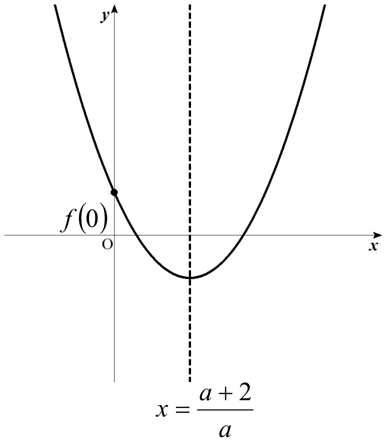
・$a>0$ のとき

$\begin{cases} 0<\dfrac{a+2}{a} \\ 0<f(0) \end{cases}$ をともに満たせばよく

$\begin{cases} -2<a \\ -\dfrac{1}{2}<a \end{cases}$

これと③，$a>0$ の共通部分から

$0<a<4$ …（Ⅰ）

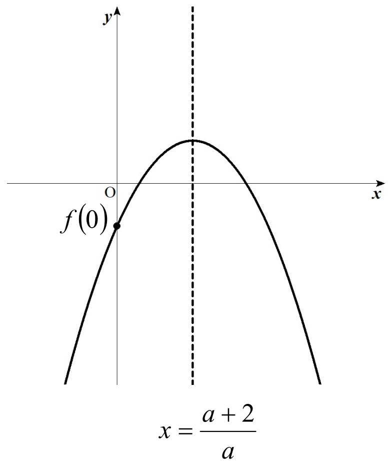


・$a<0$ のとき

$\begin{cases} 0<\dfrac{a+2}{a} \\ f(0)<0 \end{cases}$ をともに満たせばよく

$\begin{cases} a<-2 \\ a<-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

これと③，$a<0$ の共通部分は存在しない．



以上から，$f(x)=0$ が異なる2つの正の解をもつ条件は（Ⅰ），すなわち

$\underline{0<a<4}$ … $\boxed{\text{（ウ）}}$

である．

(3)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AH}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BH}=\sqrt{3}$ より，

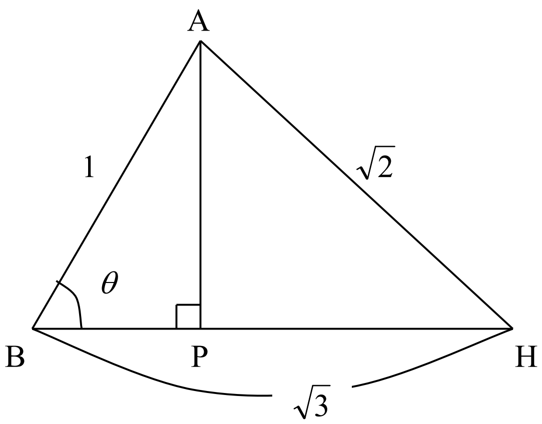
$\theta=\angle\mathrm{ABH}$

として，$\triangle\mathrm{ABH}$ における余弦定理から

$$\cos\theta=\frac{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot1\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

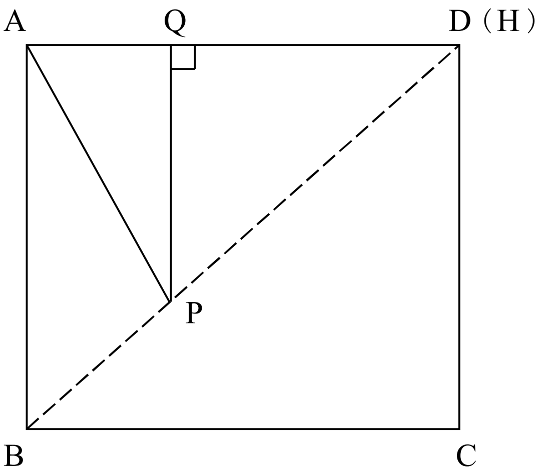
であるから

$$\mathrm{BP}=\mathrm{AB}\cos\theta=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



よって

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BH}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\underline{\frac{1}{3}}\ \cdots\ \boxed{\text{（エ）}}$$



また，Pから AD に下した垂線の足を Q とする．

右図のように，平面 ABCD が上となるように，真上から見た図を考えると，

$\mathrm{AQ}:\mathrm{AD}=\mathrm{BP}:\mathrm{BH}=1:3$

よって

$\mathrm{AQ}=\dfrac{1}{3}$

また(1)より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

なので

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\sin\theta=1\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって，△APQ における三平方の定理から

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

であるから，

△ADP の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{6}\quad\cdots\quad\boxed{（オ）}$$

2.

(1) 1回目で点Pが移動しなければ良いので

$$p_1=\underline{\frac{1}{3}}$$

(2) 点Pが$n+1$回目でAにいるには，n回目の移動を終えたときに点Pが

・Aにいる(確率p_n)場合，$n+1$回目で移動しない．

・Aにいない(確率$1-p_n$)場合，$n+1$回目で点Aに移動する．

のいずれかの場合が考えられるので

$$p_{n+1}=p_n\cdot\frac{1}{3}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{6}=\underline{\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}}\quad\cdots\ ①$$

(3) ①より

$$p_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$$

であり

$$p_1-\frac{1}{5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

なので

$$p_n-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\underline{\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}}$$

3.

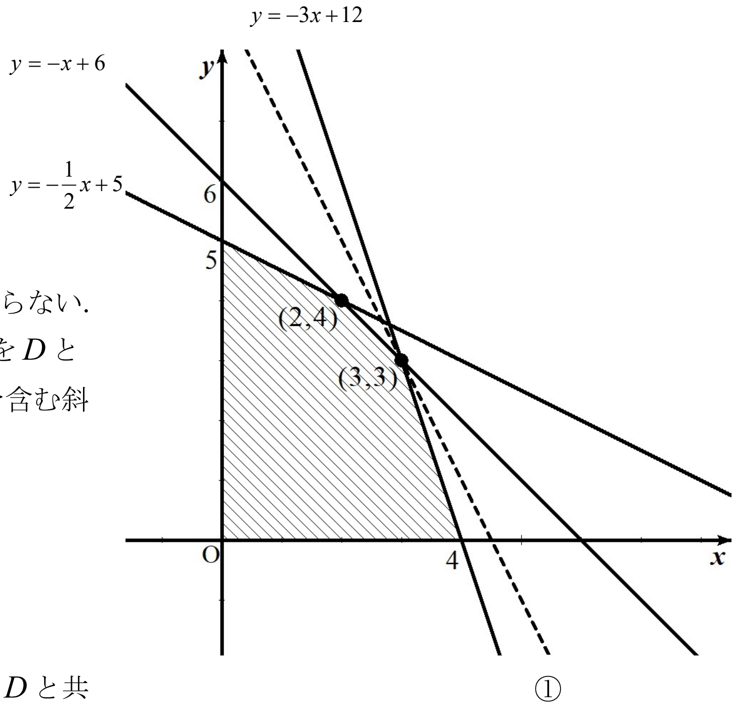
(1) 製品Xが x g，製品Yが y g の売却利益は

$\underline{4x+2y}$ 円 … $\boxed{（ア）}$

でありこのとき，原料A，B，Cの在庫から

$$\begin{cases} 2x+4y \leqq 20 \\ 2x+2y \leqq 12 \\ 6x+2y \leqq 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x+5 \\ y \leqq -x+6 \\ y \leqq -3x+12 \end{cases}$$



を満たす範囲でなくてはならない．これを満たす (x, y) の領域を D とすると，D は右図の境界を含む斜線部となる．ここで

$k=4x+2y$ … ①

とおくと

$$y=-2x+\frac{k}{2}$$

であるから，このグラフが D と共有点をもつうちで，k が最大となるのは，図より点 $(3, 3)$ を通るときである．

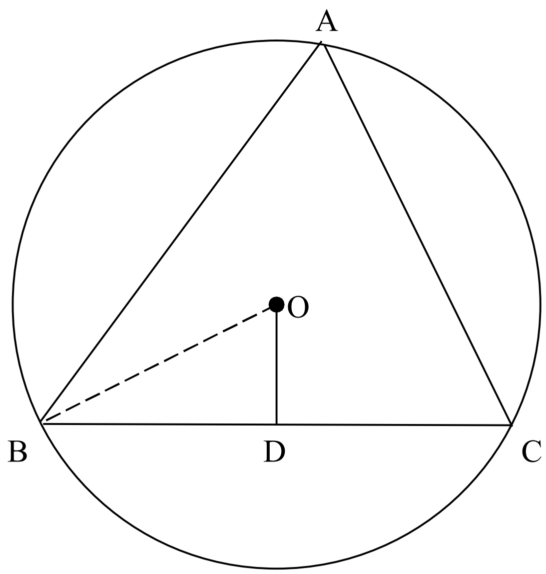
よって，利益が最大となるのは $(x, y)=\underline{(3, 3)}$ … $\boxed{（イ）}$

のときで，そのときの利益は①より

$3\cdot 4+3\cdot 2=\underline{18}$ 万円 … $\boxed{（ウ）}$

である．

(2) △ABC における正弦定理から



$$2\cdot 1=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}$$

$\mathrm{BC}=2\sin A$

△OBC は $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$

の二等辺三角形であるから，

$$\mathrm{BD}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=\sin A$$

なので，△OBD における

三平方の定理から

$$\mathrm{OD}=\sqrt{1-\sin^2 A}=\underline{\cos A}\quad\cdots\ \boxed{（エ）}$$

△OBD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sin A\cos A=\frac{1}{4}\sin 2A\quad\cdots\ ①$$

ここで

$$\frac{\pi}{6}\leqq A\leqq\frac{\pi}{3}$$ であるから

$$\frac{\pi}{3}\leqq 2A\leqq\frac{2}{3}\pi$$ より

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin 2A\leqq 1$$

なので，①より

S は $\sin 2A=1$ のとき最大となりその値は

$$\underline{\frac{1}{4}}\quad\cdots\ \boxed{（オ）}$$

4.

$$C:\begin{cases} x=\cos^3\theta-1 \\ y=\sin^3\theta+\sqrt{3} \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

(1) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta\cos^2\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta \end{cases} \quad \cdots ①$$

であるから，曲線 C の長さを L とすると

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-3\sin\theta\cos^2\theta\right)^2+\left(3\sin^2\theta\cos\theta\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}3\sqrt{\sin^2\theta\cos^4\theta+\sin^4\theta\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}3\sqrt{(\sin\theta\cos\theta)^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}3\left|\sin\theta\cos\theta\right|d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}3\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin 2\theta\right|d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta$$

$$=6\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-3(-1-1)$$

$$=\underline{6}$$

(2) $$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)'\sin^{n+1}t\,dt$$

$$=\left[-\cos t\sin^{n+1}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)\cdot(n+1)\sin^n t\cos t\,dt$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t\right)\sin^n t\,dt$$

$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)\sin^n t\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^n t - \sin^{n+2} t\right) dt$$
$$= (n+1)\left(I_n - I_{n+2}\right)$$
$$= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$$

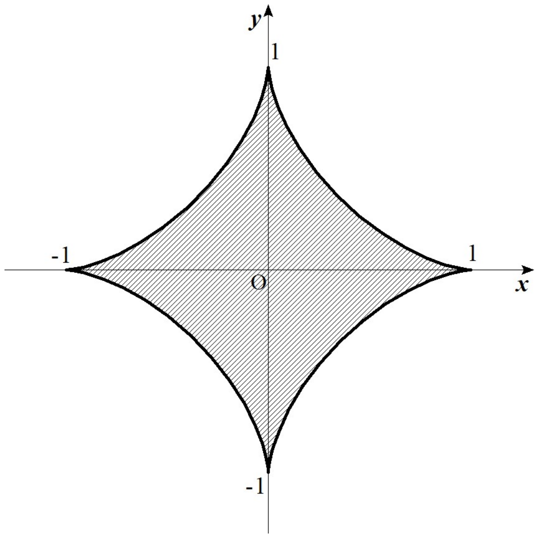
より

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$
$$\underline{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

(3)　C を x 軸方向に1，y 軸方向に $-\sqrt{3}$ 平行移動した曲線を C' とすると，

$$C' : \begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$$

であり，求める面積は C' が囲む面積と等しい.
C' はアステロイド曲線なので求める面積を S とすると，右図の斜線部の面積である.
よって，対称性を利用して



$$S = 4\int_0^1 y dx \quad \cdots \text{①}$$

ここで，

$$dx = -3\sin\theta\cos^2\theta d\theta$$

であり，x と θ の対応は

x	0	$\to$	1
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

なので①より

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3\theta \cdot \left(-3\sin\theta\cos^2\theta\right) d\theta$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\cos^2\theta d\theta$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\left(1-\sin^2\theta\right) d\theta$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^4\theta - \sin^6\theta\right) d\theta$$
$$= 12\left(I_4 - I_6\right) \quad \cdots \text{②}$$

ここで, (2) の結果から， n が偶数のときは

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \Lambda \cdot\cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0$$

であり

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

なので

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \Lambda \cdot\cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

よって②より

$$S = 12\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 12\left(1 - \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\frac{3}{8}\pi}$$

総 評

1.

(1)は複素数平面における方程式が同値になる条件を求める問題.
(2)は方程式の解の条件を二次関数のグラフをイメージして求める問題(解の存在範囲)で，$\boxed{\text{（イ）}}$ は難しくないが，$\boxed{\text{（ウ）}}$ はきちんと a の正負で場合分けをしなくてはならない.（この問題では結果的に $a<0$ のときは不適となる.）
(3)は空間図形の問題であるが，$\boxed{\text{（オ）}}$ は，普段から空間図形の考え方に慣れているかどうかで大きく差がついた問題と思われる.

2.

確率の漸化式の標準的かつ頻出問題である．これは得点したい.

3.

(1)は線形計画法の問題．これも標準的な問題ではあるが，受験生があまり好きでない分野のように思われる.
(2)は図形と三角比の問題．面積を 2 倍角の公式で $\sin 2A$ に直すところまで思いつければ特に難しいところはない.

4.

アステロイド曲線の問題.
(1)は曲線の長さの定義通りに計算すればよいが，$y=\sin 2\theta$ のグラフの概形から

$$\int_0^{2\pi}|\sin 2\theta|d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta$$

と処理してよいことに気づけると若干早い.
(2)はウォリスの積分の証明となるが，明らかに部分積分と分かるヒントも与えられているので得点したい.
(3)はそのまま C のグラフで考えてもよいが，平行移動しても面積は変わらないので，原点を中心としたアステロイド曲線に直した方が記述答案を書くうえでもいろいろ楽である.
一度アステロイド曲線に関する面積の問題を解いたことがあると有利な問題であったと思われ，(3)は差のつく問題と思われる.