― 東京理科大学 ―

２月６日　Ｂ方式　理工学部　数学

解 答・解 説

$\boxed{1}$

(1) $f(x)=xe^{-x^2+2\sqrt{2}x}$　$(0\leqq x)$

$$f'(x)=e^{-x^2+2\sqrt{2}x}+xe^{-x^2+2\sqrt{2}x}\cdot\left(-2x+2\sqrt{2}\right)$$

$$=\underline{\left(-2x^2+2\sqrt{2}x+1\right)e^{-x^2+2\sqrt{2}x}}\ \cdots\ [ア,イ,ウ,エ],$$

ここで,

$-2x^2+2\sqrt{2}x+1=0$ を解くと

$2x^2-2\sqrt{2}x-1=0$

$x=\dfrac{\sqrt{2}\pm2}{2}=\pm1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

より，$0\leqq x$ における $f(x)$ の増減は右図.

x	0		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	最大	↘

よって，$f(x)$ は $x=\underline{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\ \cdots\ [オ,カ,キ]$

において最大値をとる.

(2) (a) $S_n=\dfrac{5(3^n-1)}{3-1}=\underline{(3^n-1)\dfrac{5}{2}}\ \cdots\ [ク,ケ,コ]$

(b) $b_{n+2}=6b_{n+1}+27b_n$ は

$$\underline{\begin{cases}b_{n+2}+3b_{n+1}=9(b_{n+1}+3b_n)\\ b_{n+2}-9b_{n+1}=-3(b_{n+1}-9b_n)\end{cases}}\ \cdots\ [サ,シ]$$

《特性方程式》

$x^2=6x+27$

$x^2-6x-27=0$

$(x+3)(x-9)=0$

$x=-3,\,9$

と表され,

$$\begin{cases}b_2+3b_1=5\\ b_2-9b_1=-7\end{cases}$$

より

$$\begin{cases}b_{n+1}+3b_n=5\cdot9^{n-1}\\ b_{n+1}-9b_n=-7\cdot(-3)^{n-1}\end{cases}$$

であるから，これを解いて

$$b_n = \frac{5}{12}\cdot 9^{n-1} + \frac{7}{12}\cdot(-3)^{n-1} = \underline{9^n\cdot\frac{5}{108} - (-3)^n\cdot\frac{7}{36}}\cdots\ [ス,セソタ,チ,ツテ]$$

（c）$c_n = \dfrac{b_n}{{S_n}^m}$　とすると

$$c_n = \frac{9^n\cdot\frac{5}{108} - (-3)^n\cdot\frac{7}{36}}{\left\{(3^n-1)\frac{5}{2}\right\}^m} = \left(\frac{2}{5}\right)^m\cdot\left\{\frac{3^{2n}}{(3^n-1)^m}\cdot\frac{5}{108} - \frac{(-3)^n}{(3^n-1)^m}\cdot\frac{7}{36}\right\}$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} c_n$　が収束 するのは，$2\leqq m$　のとき.

よって，最小の m は $m=\underline{2}$　⋯ [ト]

このとき

$$c_n = \left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left\{\frac{3^{2n}}{(3^n-1)^2}\cdot\frac{5}{108} - \frac{(-3)^n}{(3^n-1)^2}\cdot\frac{7}{36}\right\}$$

$$= \frac{4}{25}\cdot\left\{\frac{3^{2n}}{3^{2n}-2\cdot 3^n+1}\cdot\frac{5}{108} - \frac{(-1)^n\cdot 3^n}{3^{2n}-2\cdot 3^n+1}\cdot\frac{7}{36}\right\}$$

$$= \frac{4}{25}\cdot\left\{\frac{1}{1-\frac{2}{3^n}+\frac{1}{3^{2n}}}\cdot\frac{5}{108} - \frac{(-1)^n}{3^n-2+\frac{1}{3^n}}\cdot\frac{7}{36}\right\}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{4}{25}\cdot\frac{5}{108} = \underline{\frac{1}{135}}\quad\cdots\ [ナ,ニヌネ]$$

(3)　$162=\underline{2\cdot 3^4}$ … [ノ]

$72=\underline{2^3\cdot 3^2}$ … [ハ,ヒ]

$\begin{cases} a=2^s\cdot A \\ b=2^t\cdot B \end{cases}$（$A$, B はそれぞれ 2 を因数にもたない自然数）

と表すことができるので

$\begin{cases} 162a^5=2^{5s+1}\cdot 3^4\cdot A^5 \\ 72b^5=2^{5t+3}\cdot 3^2\cdot B^5 \end{cases}$

より,

$162a^5$ は 2 でちょうど $\underline{(5s+1)}$回 … [フ,ヘ]

$72b^7$ は 2 でちょうど $\underline{(5t+3)}$回 … [ホ,マ]

回割り切れる.

$n=162a^5+72b^5=2^{5s+1}\cdot 3^4\cdot A^5+2^{5t+3}\cdot 3^2\cdot B^5$

より，n が 2 でちょうど 13 回割り切れるのは, $5s+1$ と $5t+3$ の片方が 13，もう一方が 13 以上であるときで，s , t は自然数であるから

$s\geqq \underline{3}$ … [ミ]　かつ　$t=\underline{2}$ … [ム]

のときである.

2

$$\begin{cases} f(x)=x^2-2x \\ g(x)=x \end{cases}$$ とする.

(1) C と l の交点の x 座標は

$x^2-2x=x$

の実数解より，これを解いて

$x^2-3x=0$

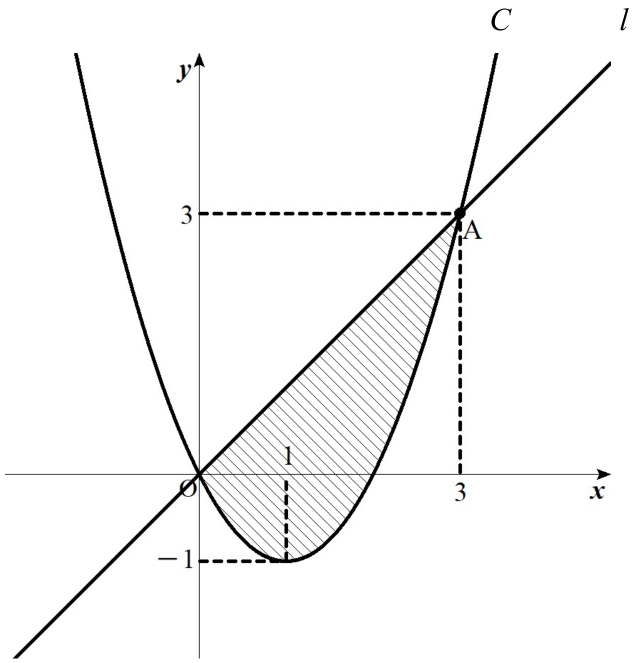
$x(x-3)=0$

$x=0,3$

P の x 座標は正であるから3で,

y 座標も3であるから

$\underline{\mathrm{P}(3,3)}$



(2) A の面積は

$\int_0^3\{g(x)-f(x)\}dx=\underline{\dfrac{9}{2}}$

(3) $y=f(x)$ について

$y=(x-1)^2-1$

$(x-1)^2=y+1$

であるから

$$C:\begin{cases} x=-\sqrt{y+1}+1 & (x\leqq 1) \\ x=\sqrt{y+1}+1 & (1\leqq x) \end{cases}$$

よって

$$V_1=\pi\int_{-1}^{3}\left(\sqrt{y+1}+1\right)^2dy-\pi\int_{-1}^{0}\left(-\sqrt{y+1}+1\right)^2dy-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3 \quad \cdots ①$$

ここで

$$\cdot\ \pi\int_{-1}^{3}\left(\sqrt{y+1}+1\right)^2dy=\pi\int_{-1}^{3}\left\{y+2+2(y+1)^{\frac{1}{2}}\right\}dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2+2y+\frac{4}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{3}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}(9-1)+2(3+1)+\frac{4}{3}(8-0)\right\}$$

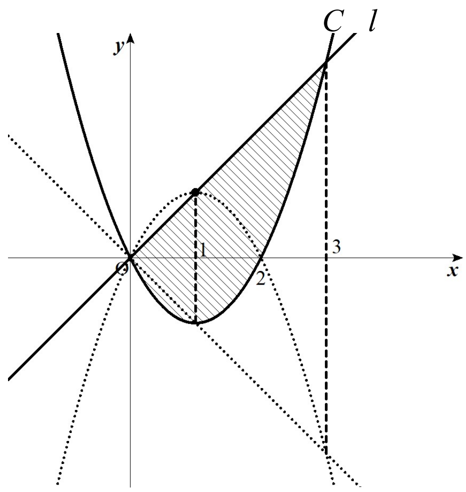
$$=\frac{68}{3}\pi$$

・$\pi\int_{-1}^{0}\left(-\sqrt{y+1}+1\right)^2dy=\pi\int_{-1}^{0}\left\{y+2-2(y+1)^{\frac{1}{2}}\right\}dy$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{4}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\pi\left\{\frac{1}{2}(0-1)+2(0+1)-\frac{4}{3}(1-0)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{6}$$



であるから，①より

$V_1=\frac{68}{3}\pi-\frac{\pi}{6}-9\pi=\underline{\frac{27}{2}\pi}$

(2)　$y=-f(x)$ と l は $x=0,1$ で交わるので

$$V_2=\pi\int_0^1\{f(x)\}^2dx+\pi\int_1^3\{g(x)\}^2dx-\pi\int_2^3\{f(x)\}^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx+\pi\int_1^3x^2dx-\pi\int_2^3\left(x^4-4x^3+4x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1+\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_2^3$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}\right)+\frac{\pi}{3}(27-1)-\pi\left\{\frac{1}{5}(243-32)-(81-16)+\frac{4}{3}(27-8)\right\}$$

$$=\frac{8}{15}\pi+\frac{26}{3}\pi-\frac{38}{15}\pi$$

$$=\underline{\frac{20}{3}\pi}$$

3

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$， $\mathrm{AC}=\sqrt{a^2+c^2}$， $\mathrm{BC}=\sqrt{b^2+c^2}$　より

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)-\left(b^2+c^2\right)}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}$$

$$=\underline{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}}$$

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{a^4}{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+c^2\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+c^2\right)}}$$

より

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}{\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(a^2+c^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}\quad\cdots\ ①$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

(2) $-\pi<\theta\leqq\pi$　において

・$\sin\theta>0$　となる範囲は　$0<\theta<\pi$　$\cdots$ ②

また　$-\frac{3}{4}\pi<\theta+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$　より

・$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$　となる範囲は

$0<\theta+\frac{\pi}{4}<\pi$　すなわち　$-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$　$\cdots$ ③

・$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)>0$　となる範囲は

$$-\frac{\pi}{2}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\quad \text{すなわち}\quad -\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{\pi}{4}\quad \cdots ④$$

よって，(*)を満たすθの範囲は，②, ③, ④の共通部分より

$$\underline{0<\theta<\frac{\pi}{4}}$$

(3) ①より

$$S^2=\frac{1}{4}\left\{a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2\right\}\quad \cdots ①'$$

であり

$$b^2+c^2=\frac{1}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{1}{\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left\{\frac{1}{2}\sin 2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2}$$

分母は 2 倍角の公式で変形!

$$=\frac{4}{\sin^2\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=\frac{4}{\cos^2 2\theta}$$

$$=\frac{4}{\left(1-2\sin^2\theta\right)^2}$$

また，

$$b^2c^2=\frac{1}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

なので，これは b^2+c^2 と全く同じ式となるので

$$b^2+c^2=b^2c^2=\frac{4}{\left(1-2\sin^2\theta\right)^2}\quad \cdots ⑤$$

ここで $a=\dfrac{1}{\sin\theta}$ より $\sin\theta=\dfrac{1}{a}$ なので

$$\sin^2\theta=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{t}$$

よって⑤から

$$b^2+c^2=b^2c^2=\frac{4}{\left(1-\frac{2}{t}\right)^2}=\frac{2^2}{\left(\frac{t-2}{t}\right)^2}=\left(\frac{2t}{t-2}\right)^2$$

よって①'より

$$S^2=\frac{1}{4}\left\{t\left(\frac{2t}{t-2}\right)^2+\left(\frac{2t}{t-2}\right)^2\right\}=\frac{t+1}{4}\left(\frac{2t}{t-2}\right)^2=\underline{\frac{t^2(t+1)}{(t-2)^2}}$$

(4)　$S^2=f(t)$ とすると

$$f(t)=\frac{t^2(t+1)}{(t-2)^2}=\frac{t^3+t^2}{(t-2)^2}$$

$$f'(t)=\frac{(3t^2+2t)(t-2)^2-(t^3+t^2)\cdot 2(t-2)}{(t-2)^4}$$

$$=\frac{(3t^2+2t)(t-2)-2(t^3+t^2)}{(t-2)^3}$$

$$=\frac{t(t^2-6t-4)}{(t-2)^3}$$

ここで，$t^2-6t-4=0$ を解くと

$t=3\pm\sqrt{13}$

であり，

$$\begin{cases}0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\\ t=a^2=\dfrac{1}{\sin^2\theta}\end{cases}$$

t	2		$3+\sqrt{13}$	
$f'(t)$		−	0	＋
$f(t)$		↘	最小	↗

なので $2<t$ より，この範囲における $f(t)$の増減は上のようになる．

よって $S=\sqrt{f(t)}$ が最小となるのは

$a^2=t=\underline{3+\sqrt{13}}$

のとき．

総 評

1

(1)は数学Ⅲの微分の基本問題．とくに間違えやすそうなところは見当たらない．
(2)は3項間漸化式および極限の問題．(c)の式が若干見にくいが，きちんと収束条件が分かっていればとくに難しくもないだろう．
(3)整数問題に分類されるのであろうが，これも目立って難しいところはないように感じられる．

2

放物線と直線で囲まれた図形の面積や回転体の体積の問題．面積までは特に難なく解ける．
(3)はきちんと切り貼りする場所や積分する関数が求められ，丁寧に計算できればとくに難しくないはずである．
(4)も回転体の体積の必須問題で，回転させたときに外側になる部分及びその境目をきちんと考えて積分計算をしていけばよい．

3

空間図形内の三角形の面積の問題．
(1)に関しては余弦定理，ベクトルのどちらを用いても求めることができる．
(2)も１つ１つ範囲を調べていけばとくに間違える要素はない．
(3)は工夫ができると少し早く解けるであろう．三角比の相関関係や，加法定理を用いてb，cを一つずつ求めてもよいが，解説のように，b，cの三角比の角が同じなので，b，cをセットで考えるようにするのが良いであろう．
(4)は単純な分数関数の増減を調べ，最大値をとる変数の値を求める問題で，(3)がきちんと解けていればとくに難しいところはない．

全体を通して，比較的取り組みやすく，難易度もそこまで高くない問題中心であったと思われる．