― 法政大学 ―

2月11日　A方式Ⅰ日程　数学

解答・解説

〔Ⅰ〕

(1)　$p : a+\sqrt{2}b=0$

$q : a=0$ かつ $b=0$

a，b は有理数より，$a+\sqrt{2}b=0$ のとき $a=0$ かつ $b=0$ なので

命題「$p \Rightarrow q$」は真

よって [ア]＝①

命題「$q \Rightarrow p$」も真

よって [イ]＝①

(2)　$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2-1}=\underline{3+2\sqrt{2}}\ \cdots\ [ウ,エ]$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{2-\sqrt{2}}{4-2}=\underline{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\ \cdots\ [オ,カ]$$

であるから

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}x+\frac{1}{2+\sqrt{2}}y=\sqrt{2}$$

のとき

$$(3+2\sqrt{2})x+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y=\sqrt{2}$$

$$(3x+y)+\left(2x-\frac{y}{2}\right)\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

であり，x と y は有理数より

$$\begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$$

これを解いて

$$x=\underline{\frac{2}{7}}\ \cdots\ [キ,ク],\quad y=\underline{\frac{-6}{7}}\ \cdots\ [ケコ,サ]$$

(3) α は虚数であり，これが

$x^2-2ax+b+1=0$

の解なので，$\overline{\alpha}$ もこの解である．

よって解と係数の関係式から

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=2a & \cdots ① \\ \alpha\overline{\alpha}=b+1 & \cdots ②\end{cases}$$

同様，虚数 $\alpha+1$ が

$x^2-bx+5a+3=0$

の解より

$\overline{\alpha+1}=\overline{\alpha}+1$

もこの解であるから，解と係数の関係式より

$$\begin{cases}(\alpha+1)+(\overline{\alpha}+1)=b \\ (\alpha+1)(\overline{\alpha}+1)=5a+3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}+2=b & \cdots ③ \\ \alpha\overline{\alpha}+\alpha+\overline{\alpha}+1=5a+3 & \cdots ④\end{cases}$$

①を③へ代入して

$2a+2=b$

$2a-b=-2$ $\cdots$ ⑤

①, ②を④へ代入して

$b+1+2a+1=5a+3$

$3a-b=-1$ $\cdots$ ⑥

⑤, ⑥を解いて

$a=\underline{1}$ $\cdots$ [シ]，$b=\underline{4}$ $\cdots$ [ス]

であるから α は

$x^2-2x+5=0$

の解なので

$\alpha=\underline{1\pm 2i}$ $\cdots$ [セ,ソ]

(4)　$P=\{x|x^2+ax+3=0\}$，$Q=\{x|x^2-ax-5=0\}$

$P\cap Q$ が空集合ではないとき

$$\begin{cases} x^2+ax+3=0 \\ x^2-ax-5=0 \end{cases}$$

が共通解をもつので，その共通解を t とすると

$$\begin{cases} t^2+at+3=0 & \cdots ① \\ t^2-at-5=0 & \cdots ② \end{cases}$$

を満たすので，①＋②より

$2t^2-2=0$

$t^2=1$

よって　$t=\pm1$

・$t=1$ を①(または②)へ代入，計算すると　$a=-4$

・$t=-1$ を①(または②)へ代入，計算すると　$a=4$

よって，$P\cap Q$ が空集合にならないとき

$a=\underline{-4}$ … [タチ]　または　$a=\underline{4}$ … [ツ]

$a=-4$ のとき

$P=\{x|x^2-4x+3=0\}$，$Q=\{x|x^2+4x-5=0\}$

であり

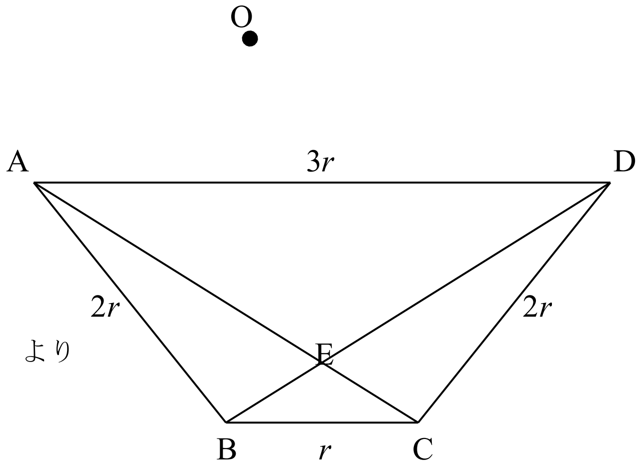
・$x^2-4x+3=0$ を解くと
　$(x-1)(x-3)=0$　より　$x=1,3$

・$x^2+4x-5=0$ を解くと
　$(x+5)(x-1)=0$　より　$x=-5,1$

であるから

$P\cup Q=\underline{\{-5,1,3\}}$ … [テト,ナ,ニ]

〔Ⅱ〕



$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{6+4\sqrt{3}}{3} \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{3} \\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OE}=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$AD /\!/ BC$ であり，$BC=r$，$AD=3r$ より

$\overrightarrow{AD}=\underline{3}\overrightarrow{BC}$ … [ア]

$=3\left(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

なので

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}\cdot3\left(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=3\left(-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=3\left(-\frac{6+4\sqrt{3}}{3}+\frac{3+4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$=\underline{-3}$ … [イ ウ]

台形ABCDはと等脚台形であるから

$\triangle EAD \backsim \triangle ECB$　なので

$AE:CE=AD:CB=3:1$ … ①

よって

$AC:EC=4:1$ なので

$\dfrac{EC}{AC}=\underline{\dfrac{1}{4}}$ … [エ,オ]

また①より

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OC}}{3+1}=\underline{\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}} \quad \cdots \ [カ,キ,ク]$$

より，これを整理して

$\overrightarrow{OA}=\underline{4\overrightarrow{OE}-3\overrightarrow{OC}}$ … [ケ,コ]

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(4\overrightarrow{\mathrm{OE}}-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$

$$=4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$=4\cdot\frac{3+2\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{3+4\sqrt{3}}{3}$$

$$=\underline{3}\quad\cdots\quad[\text{サ}]$$

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$$=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=-3+\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$$

$$=\underline{-1+\frac{4\sqrt{3}}{3}}\quad\cdots\quad[\text{シス,セ,ソ,タ}]$$

$\angle\mathrm{OAD}=\theta$　としたとき

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|}$$

[イウ]より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3$$

[サ]より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|=\sqrt{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}}=\sqrt{3}$$

なので

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{3}\cdot 3r}$$

$$r\cos\theta=\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}\quad\cdots\quad[\text{チ,ツ}]$$

BからADに下した垂線の足をH

とすると，

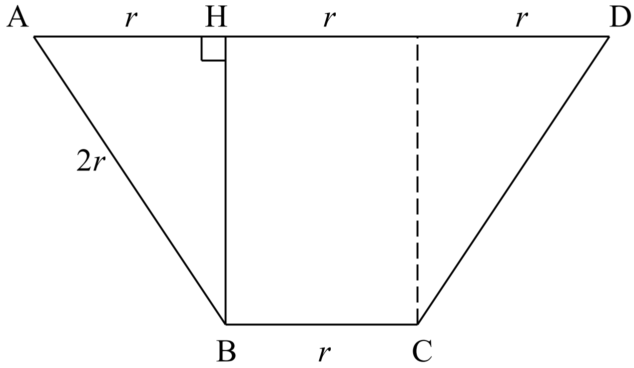
$\mathrm{AH}=r$

より

$$\angle\mathrm{BAD}=\frac{\pi}{3}$$

よって

[テ] = ⑤



よって

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}$$

[シス,セ,ソ,タ]より

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\left(-1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3-4\sqrt{3}}{3}$$

なので

$$r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=r\cdot\frac{\frac{3-4\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}\cdot 2r}=\underline{\frac{-4+\sqrt{3}}{6}}$$

よって加法定理から

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-4+\sqrt{3}}{6}$$

$$r\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=\frac{-4+\sqrt{3}}{6}$$

$$r\left(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\right)=\frac{-4+\sqrt{3}}{3}$$

この両辺を $r\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で割ると

$$1-\sqrt{3}\tan\theta=-\frac{4}{\sqrt{3}}+1$$

$$\tan\theta=\underline{\frac{4}{3}}\quad\cdots\quad[\text{ヌ},\text{ネ}]$$

よって

$$\cos\theta=\frac{3}{5}$$

なので

$$r\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

へ代入して

$$\frac{3}{5}r=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$r=\underline{\frac{5\sqrt{3}}{9}}\ \cdots\ [ノ,ハ,ヒ]$$

〔Ⅲ〕

(1)(ⅰ) M が偶数になるのは，M の一の位の数が偶数となるときで，偶数のカードは4枚あるので，M が偶数となる確率は $\underline{\dfrac{4}{9}}$ … [ア,イ]

(ⅱ) 作られる M の総数は ${}_9P_4$ 通り．
$2000 \leqq M \leqq 2020$ である M は存在しないので，$1000 \leqq M < 2000$ となる確率を調べればよい．
そのような M は ${}_8P_3$ 通り考えられる．
よって M が2020以下となる確率は

$$\frac{{}_8P_3}{{}_9P_4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = \underline{\frac{1}{9}} \ \cdots \ [ウ,エ]$$

(ⅲ) $1000 \leqq M < 2000$ における偶数となる M は
千の位が1で，一の位が偶数となる数であればよい．
$2000 \leqq M \leqq 2020$ である M は存在しないので，M が2020以下でかつ偶数となる確率は

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

よって，これと(ⅰ),(ⅱ)から，M が2020以下または偶数となる確率は

$$\frac{4}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{18} = \underline{\frac{1}{2}} \ \cdots \ [オ,カ]$$

(2)(ⅰ) N の一の位が6となるのは，4枚のカードの最大値が6であるときより，そのようなカードの選び方は ${}_5C_3$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_9C_4} = \underline{\frac{5}{63}} \ \cdots \ [キ,クケ]$$

(ⅱ) N が偶数となるのは，一の位が4か6か8の場合が考えられる．各場合の数は(ⅰ)同様に考えればよいので，求める確率は

$$\frac{{}_3C_3+{}_5C_3+{}_7C_3}{{}_9C_4} = \frac{1+10+35}{9\cdot 2\cdot 7} = \underline{\frac{23}{63}} \ \cdots \ [コサ,シス]$$

(ⅲ) $2000 \leqq N \leqq 2020$ となる N は存在しないので，$1000 \leqq N < 2000$ となる確率を求めればよい．そのようになるには，4枚のカードの中に1のカードが含まれていれば良いので，求める確率は

$$\frac{{}_8C_3}{{}_9C_4} = \underline{\frac{4}{9}} \ \cdots \ [セ,ソ]$$

(ⅳ) $3000 \leqq N$ において，N が偶数となるような値は『3□□6』，『3□□8』，『4□□8』，『5□□8』のタイプが考えられる．
・『3□□6』となるのは，選ばれるカードが3，4，5，6のときの1通り．
・『3□□8』となるのは，選ばれるカードが3と8は確定で，残り2枚が4～7

のいずれかであるときより

${}_4C_2 = 6$ 通り

・『4□□8』となるのは, 選ばれるカードが4と8は確定で，残り2枚が5～7

のいずれかであるときより

${}_3C_2 = 3$ 通り

・『5□□8』となるのは, 選ばれるカードが5, 6, 7, 8のときの1通り.

よって，N が3000以上の偶数となる確率は

$$\frac{1+6+3+1}{{}_9C_4} = \frac{11}{{}_9C_4}$$

であるから，これと(ⅱ)より，N が偶数であったとき，N が3000以上である確率は

$$\frac{\dfrac{11}{{}_9C_4}}{\dfrac{{}_3C_3+{}_5C_3+{}_7C_3}{{}_9C_4}} = \frac{11}{1+10+35} = \underline{\frac{11}{46}} \quad \cdots \text{ [タチ,ツテ]}$$

〔Ⅳ〕

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ … ①

①に $n=1$ を代入して

$a_2 = 3\cdot a_1 + 2^1 = 3+2 = \underline{5}$ … [ア]

①の両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$$

より

$$b_n = \frac{a_n}{2^n}$$

のとき

$$b_{n+1} = \underline{\frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}} \quad \cdots \ [イ,ウ,エ,オ] \quad \cdots \ ②$$

$$b_{n+1} + k = \frac{3}{2}(b_n + k) \quad \cdots \ ③$$

と変形できるとすると，これを整理して

$$b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}k$$

これと②が一致するので

$k = \underline{1}$ … [カ]

より，③から

$$b_{n+1} + 1 = \frac{3}{2}(b_n + 1)$$

なので，$c_n = b_n + 1$　としたとき

$$c_{n+1} = \frac{3}{2}c_n$$

となり

$$c_1 = b_1 + 1 = \frac{a_1}{2^1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

より，

$$c_n = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \underline{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \quad \cdots \ [キ,ク]$$

であるから，[ケ]＝②

よって

$$b_n+1=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

より

$$\frac{a_n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

$$a_n=\underline{3^n-2^n}\ \cdots\ [コ,シ]$$

であるから，[サ]＝②，[ス]＝②

$$\begin{aligned}S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(3^k-2^k\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(3\cdot3^{k-1}-2\cdot2^{k-1}\right)\\&=\frac{3\left(3^n-1\right)}{3-1}-\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}\\&=\frac{3^{n+1}}{2}-2^{n+1}+\frac{1}{2}\\&=\underline{\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-2^{n+2}+1\right)}\ \cdots\ [セ,ソ]\end{aligned}$$

なので，[タ]＝③，[チ]＝④

$T=4a_n-2S_n+1$

とすると

$$\begin{aligned}T&=4\left(3^n-2^n\right)-2\cdot\frac{1}{2}\left(3^{n+1}-2^{n+2}+1\right)+1\\&=4\cdot3^n-2^{n+2}-3\cdot3^n+2^{n+2}-1+1\\&=3^n\end{aligned}$$

である．

T が14桁の数であるとき

$10^{13}\leqq T<10^{14}$

$10^{13}\leqq 3^n<10^{14}$

より

$$13\leqq\log_{10}3^n<14$$

$$13\leqq n\log_{10}3<14$$

$$\frac{13}{\log_{10} 3} \leqq n < \frac{14}{\log_{10} 3} \quad \cdots \text{①}$$

$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$　であるから

$$\frac{13}{0.48} < \frac{13}{\log_{10} 3} < \frac{13}{0.47}$$

$$27.0\Lambda < \frac{13}{\log_{10} 3} < 27.6\Lambda$$

よって，これと①から，T が14桁の数となる最小の n は $\underline{28}$　… [ツテ]

〔Ⅴ〕

$\int_{-2}^{x} f(t)dt = x^3 + ax^2 + 6x + a$ … ①

①に $x=-2$ を代入すると

$0=-8+4a-12+a$

$a=\underline{4}$ … [ア]

①の両辺を x について微分して

$f(x)=3x^2+2ax+6=\underline{3x^2+8x+6}$ … [イ,ウ,エ]

$g(x)=x^3+bx^2+cx+d$

$f'(x)=6x+8$

$g'(x)=3x^2+2bx+c$

$\begin{cases} g(-1)=f(-1) \\ g(0)=f(0) \\ g'(0)=f'(0) \end{cases}$ より

$\begin{cases} -1+b-c+d=1 \\ d=6 \\ c=8 \end{cases}$

なので $\underline{b=4, c=8, d=6}$ … [オ,カ,キ]

よって

$g(x)=x^3+4x^2+8x+6$

なので

$h(x)=g(x)-f(x)$

$\quad =x^3+4x^2+8x+6-(3x^2+8x+6)$

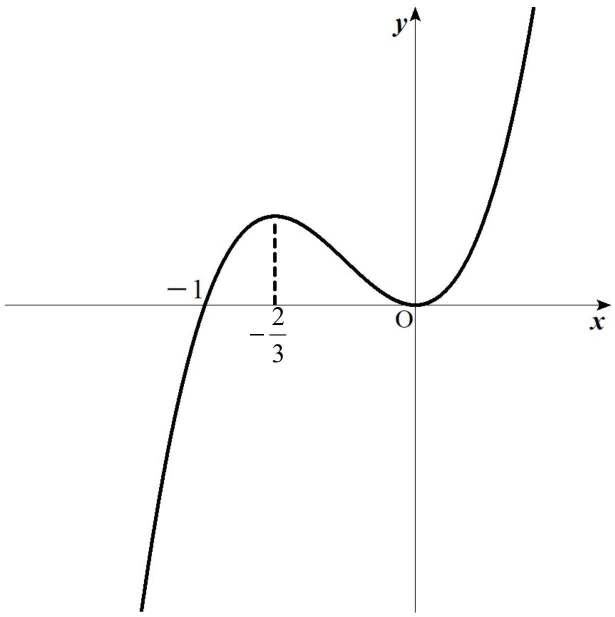
$\quad =x^3+x^2$

より

$h'(x)=3x^2+2x=x(3x+2)$

なので，$h'(x)=0$ となる x は

$x=\underline{\dfrac{-2}{3}, 0}$ … [クケ,コ,サ]



であり，$C: y=h(x)$ のグラフは右図

のようになるので，$h(0)$ は $h(x)$ の極小値であるが最小値ではない.

よって [シ]=④

C と x 軸の共有点の個数は $\underline{2}$ 個 … [ス]

C と x 軸で囲まれた部分の面積は

$\int_{-1}^{0} h(x)dx = \underline{\frac{1}{12}}$ … [セ,ソタ]

（ $1/12$ 公式: $\frac{1}{12}\cdot 1\cdot 1^4$ ）

〔Ⅵ〕

$f(x)=\sqrt{x^2+4x}+x$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)=\infty$

より，[ア]＝⑨

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+4x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)}{\sqrt{x^2+4x}-x}=\underline{\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}-x}}\quad\cdots\ [イ]$$

であり，$x\leqq -4$ のとき，$-x=\sqrt{x^2}$ であることに注意して

$$f(x)=\frac{4}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+4x}-1}=\frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1}$$

より[ウ]＝⑧

よって

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1}=\frac{4}{-1-1}=-2$$

なので[エ]＝⑥

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+4x\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+4)+1=\underline{\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}+1}\quad\cdots\ [オ]$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+4x\right)^{\frac{1}{2}}-(x+2)\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+4x\right)^{-\frac{1}{2}}(2x+4)}{x^2+4x}$$

$$=\frac{x^2+4x-(x+2)(x+2)}{\left(x^2+4x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\underline{\frac{-4}{\left(x^2+4x\right)^{\frac{3}{2}}}}\quad\cdots\ [カキ]$$

なので[ク]＝⑥

（ⅰ）$0<x$ において

$f'(x)>0$ かつ $f''(x)<0$

が常に成り立つので，$f(x)$は常に増加し，Cのグラフは上に凸となる．

よって，[ケ]＝①

（ⅱ）$x<-4$ において

$f''(x)<0$ であるから，$f'(x)$は常に減少する．

よって，[コ]＝②

また，$x<-4$ のとき $-x=\sqrt{x^2}$ に注意して

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}}+1$$

より

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{4}{x}}}+1\right)=\frac{1}{-1}+1=0$$

よって，[サ]＝⓪

であるから，$x<-4$ において

$f'(x)<0$ かつ $f''(x)<0$

が常に成り立つので，$f(x)$は常に減少し，Cのグラフは上に凸となる．

よって，[シ]＝③

$$V=\pi\int_{-5}^{-4}\{f(x)+2\}^2dx$$

$$=\pi\int_{-5}^{-4}\left\{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)\right\}^2dx$$

$$=\underline{\pi\int_{-5}^{-4}\left\{2x^2+8x+4+2(x+2)\sqrt{x^2+4x}\right\}dx}\ \cdots\ [ス,セ]$$

$$I=2\int_{-5}^{-4}(x+2)\sqrt{x^2+4x}dx$$

として，

$x^2+4x=t$ とおくと

$(2x+4)dx=dt$

$2(x+2)dx=dt$

であり，xとtの対応は

x	$-5\ \to\ -4$
t	$5\ \to\ 0$

より

$$I=\int_5^0\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_5^0=\frac{2}{3}\left(0-5\sqrt{5}\right)=\underline{-\frac{10}{3}\sqrt{5}}\ \cdots\ [タ]$$

であるから，[ソ] = ⑥

また

$$\int_{-5}^{-4}\left(2x^2+8x+4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3+4x^2+4x\right]_{-5}^{-4}$$

$$=\frac{2}{3}(-64+125)+4(16-25)+4(-4+5)$$

$$=\frac{26}{3}$$

であるから

$$V=\left(\frac{26}{3}+I\right)\pi$$

よって

[チ] = ⓪

〔Ⅶ〕

$$f(t)=\log\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right\}\quad (t>0)$$

(1) $f'(t)=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}=\dfrac{t^2-1}{t^3+t}$

t	0		1	
$f'(t)$		−	0	+
$f(t)$		↘	最小	↗

より，[ア]＝⑦

$$f'(t)=\frac{(t+1)(t-1)}{t(t^2+1)}$$

であり，$0<t$ より，$f(t)$の増減は右上のようになる．

$$f(1)=\log\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)\right\}=\log 1=0$$

であるから，

$t=\underline{1}$ … [イ] において最小値$\underline{0}$ … [ウ] をとる．

また，$1<t$ においては単調増加するから，[エ]＝④

(2) $\begin{cases} x=f(t) \\ y=t^2 \end{cases}$ $(1<t)$

とすると

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^3+t} \\ \dfrac{dy}{dt}=2t \end{cases}$$

より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{\frac{t^2-1}{t^3+t}}=\frac{2t^4+2t^2}{t^2-1}$$

であるから[オ]＝②

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(8t^3+4t)(t^2-1)-(2t^4+2t^2)\cdot 2t}{(t^2-1)^2}$$

$$=\underline{\frac{4t^5-8t^3-4t}{(t^2-1)^2}}\quad \cdots\ [カ,キ]$$

であり，[ク]＝④である．

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{4t}{\left(t^2-1\right)^2}\left(t^4-2t^2-1\right)$$

であり，$1<t$ のとき $0<\dfrac{4t}{\left(t^2-1\right)^2}$ であるから，$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ の正負は t^4-2t^2-1 の正負と一致する．

ここで $t^4-2t^2-1=0$ を解くと

$t^2=1\pm\sqrt{2}$

$1<t^2$ より

$t^2=1+\sqrt{2}$

であるから，

$\dfrac{dy}{dx}$ の増減は右のようになる．

t^2	1		$1+\sqrt{2}$	
$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$		−	0	+
$\frac{dy}{dx}$		↘	最小	↗

よって，l 傾きの最小値は，

$$\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)-1}=\frac{2\left(1+\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)-1}=\underline{6+4\sqrt{2}}\quad\cdots\ [ケ,コ,サ]$$

$1<t$ において，t と t^2 の値は一対一に対応する．

また，

$$\lim_{t\to1+0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1+0}\frac{2t^4+2t^2}{t^2-1}=+\infty$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^4+2t^2}{t^2-1}=+\infty$$

であるから，上の増減表より，l の傾が k となる t の個数 n は

・$k<6+4\sqrt{2}$ となるのは $n=\underline{0}$ $\cdots$ [シ]

・$k=6+4\sqrt{2}$ となるのは $n=\underline{1}$ $\cdots$ [ス]

・$k>6+4\sqrt{2}$ となるのは $n=\underline{2}$ $\cdots$ [セ]

$\dfrac{dy}{dx}=12$ となるのは

$$\frac{2t^4+2t^2}{t^2-1}=12$$

$2t^4+2t^2=12t^2-12$

$t^4-5t^2+6=0$

$\left(t^2-2\right)\left(t^2-3\right)=0$

$t^2=2,3$

$1 < t$　より

$t = \underline{\sqrt{2}, \sqrt{3}}$　$\cdots$　[ソ,タ]

のとき.

$1 < t$　において, $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}$ ともに単調増加であるから

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b t^2\,dx$$

ここで

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2 - 1}{t^3 + t}$　であったから

$$dx = \frac{t^2 - 1}{t^3 + t}dt$$

x と t の対応は

x	a	$\to$	b
t	$\sqrt{2}$	$\to$	$\sqrt{3}$

なので

$$S = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^2 \cdot \frac{t^2 - 1}{t^3 + t}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t^3 - t}{t^2 + 1}dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(t - \frac{2t}{t^2 + 1}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - \log\left(t^2 + 1\right)\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}(3 - 2) - (\log 4 - \log 3)$$

$$= \frac{1}{2} - \log\frac{4}{3}$$

よって[チ] = \underline{②}, [ツ] = \underline{⑤}

総 評

〔Ⅰ〕

(1), (2) は易しい問題であり特に問題なく解けたであろう．
(3) は実部と虚部を文字でおかず，共役記号と、解と係数の関係式を利用した解法にした方が早いであろう．

〔Ⅱ〕

最初に等脚台形であることにすぐ気付けたかどうかで，$\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AC}}$ を求める際の相似や，$\angle\mathrm{BAD}$ を求めるところに差が出たのではないか．また，最後の $\tan\theta$ を求めるところも，誘導の意図が読めたかどうかで大きく差のついた問題であったように思われる．

〔Ⅲ〕

確率の基本問題．ルールを理解し，計算を丁寧にやれればそこまで難しくないが，余計な計算や遠回りをしてしまう受験生が多そうである．

〔Ⅳ〕

漸化式の問題と最後は常用対数の問題であるが，誘導がしっかりされているので，きちんと対策ができていればつまづくところはないように思われる．

〔Ⅴ〕

定積分で表される関数の基本問題に，3 次関数とその接線で囲む図形の面積問題．前半は積分(数学Ⅱ)の基本問題であるから落としてはいけない．後半も x 軸が接線であるから，3 次関数の $1/12$ 面積公式で定積分しないで済ませたい．

〔Ⅵ〕

最初の極限の問題は，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}$ の極限は $t=-x$ と置き換えて $\displaystyle\lim_{t\to\infty}$ の計算に直すところを，そのまま処理させる問題で，置き換えを丸暗記せず，きちんと置き換えるとどこが面倒なのかを考えたことがあるかどうかで差が出たであろう．
後半の求積問題は誘導してくれているのでそこまで難しくはないが，長ったらしい．

〔Ⅶ〕

最初の対数関数はそこまで後半に影響はなく，主に媒介変数の微分や，グラフの求積問題であり，最後の面積も誘導やヒントがあるので，きちんと勉強ができていればどう計算すればいいか分からないということはないだろうが，長ったらしい．