― 法政大学 ―

2月14日　A方式Ⅱ日程　数学

解答・解説

〔Ⅰ〕

(1) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

であるから，

$P=$[ア]$=$①，$Q=$[イ]$=$⑤

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

より，[ウ]$=$②

すべての a , b , c に対して

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-abR \quad \cdots (※)$$

が成り立つとき，(※)の右辺を整理すると

$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2-abR$

であるから，(※)の両辺を比較して

$-3abc=3a^2b+3ab^2-abR$

$abR=ab\cdot 3(a+b+c)$

より

$R=3(a+b+c)$

よって

[エ]$=$③

また

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

であるから

$\begin{cases} S=a^2+b^2+c^2 \\ T=(ab+bc+ca) \end{cases}$ なので，[オ]$=$⑦，[カ]$=$④

(2) $x^3+ax^2+x+b=0 \quad \cdots$（ⅰ）

（ⅰ）の残りの解を γ とすると，解と係数の関係式より

$$\begin{cases} (2+i)+(2-i)+\gamma=-a \\ (2+i)(2-i)+(2-i)\gamma+\gamma(2+i)=1 \\ (2+i)(2-i)\gamma=-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4+\gamma=-a \\ 5+4\gamma=1 \\ 5\gamma=-b \end{cases}$$

であるから，$a=\underline{-3}$ … [キク]，$b=\underline{5}$ … [ケ]，$\gamma=\underline{-1}$ … [コサ]

であり，

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-b}=\underline{\frac{-1}{5}}\ \cdots\ [シス,セ]$$

(3) $\mathrm{A}(0,5)$ と $l:2x-y=0$ の距離は

$$\frac{|2\cdot 0-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\underline{\sqrt{5}}\ \cdots\ [ソ]$$

$\mathrm{A}(0,5)$を通り，lと垂直な直線をmとすると

$$m:y=-\frac{1}{2}x+5$$

であり，lとmの交点をBとすると，Bのx座標は

$-\frac{1}{2}x+5=2x$ の実数解より

$x=2$

Bのy座標は

$y=2\cdot 2=4$

より

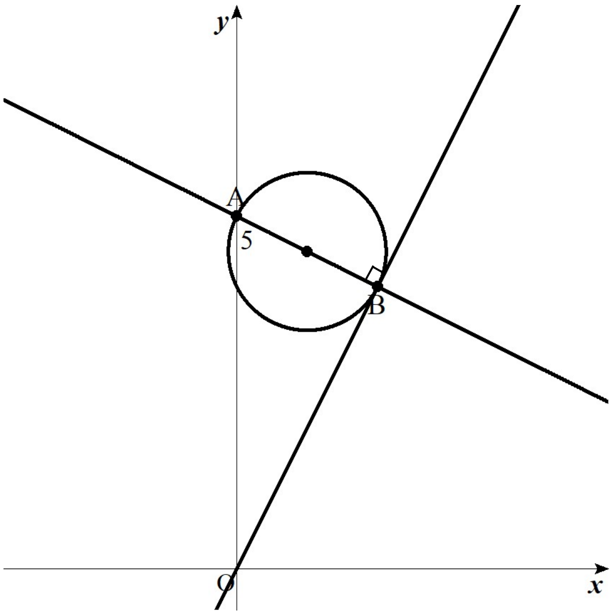
$\mathrm{B}(2,4)$

右図のように，求める円の中心は

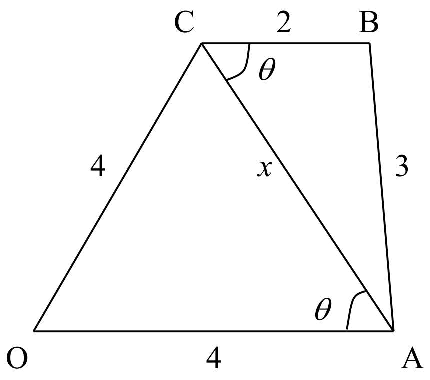
A , Bの中点より

$\left(1,\frac{9}{2}\right)$ なので，その円の方程式は

$$\underline{(x-1)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{5}{4}}\ \cdots\ [タ,チ,ツ,テ,ト]$$



〔Ⅱ〕



OA // BC なので,

$\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{OAC} = \theta$

より，△ABC における余弦定理より

$3^2 = x^2 + 2^2 - 2 \cdot x \cdot 2 \cdot \cos\theta$

$\underline{x^2 - 4x\cos\theta = 5}$ … [ア,イ] … ①

△OAC における余弦定理より

$4^2 = x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 \cdot \cos\theta$

$x^2 - 8x\cos\theta = 0$ … ②

①×2−②より

$x^2 = 10$

$0 < x$ より

$x = \mathrm{AC} = \underline{\sqrt{10}}$ … [ウエ]

②より

$10 - 8\sqrt{10}\cos\theta = 0$

$\cos\theta = \underline{\dfrac{\sqrt{10}}{8}}$ … [オカ,キ]

よって

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

であるから，台形OABCの面積は，△ABCと△OACの面積の和と考えて

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot 2 \cdot \sin\theta + \frac{1}{2} \cdot x \cdot 4 \cdot \sin\theta = 3x\sin\theta = 3 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{3\sqrt{6}}{8} = \underline{\frac{9\sqrt{15}}{4}} \quad \cdots \ [ク,ケコ,サ]$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4 \cdot x \cdot \cos\theta = 4 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{8} = \underline{5} \quad \cdots \ [シ]$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \left|-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$$

より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$10 = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$10 = 16 - 2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 16$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \underline{11}$ … [スセ]

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \underline{\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}$ … [ソ,タ]

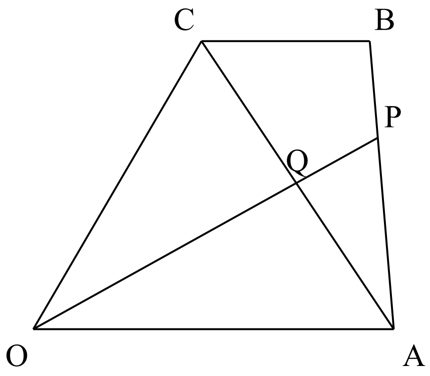
であるから

$$|\overrightarrow{OB}|^2 = \left|\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + |\overrightarrow{OC}|^2 = 4 + 11 + 16 = 31$$

なので

$OB = \underline{\sqrt{31}}$ … [チツ]

$AP : PB = k : (1-k)$ より



$$\overrightarrow{OP} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$$

$$= (1-k)\overrightarrow{OA} + k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}k\right)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \quad \cdots ③$$

$AQ : QC = t : (1-t)$ より

$$\overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC} \quad \cdots ④$$

$\overrightarrow{OP} // \overrightarrow{OQ}$ であるから，③と④の $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ の係数比が等しいので

$$\left(1 - \frac{1}{2}k\right) : k = (1-t) : t$$

より

$$\left(1 - \frac{1}{2}k\right)t = k(1-t)$$

$$\frac{2-k}{2}t = k - kt$$

$$\frac{2+k}{2}t = k$$

$t = \underline{\dfrac{2k}{2+k}}$ … [テ,ト] … ⑤

$S_1 : S_2 = 1 : 5$

のとき，

$AQ : QC = t : (1-t) = 1 : 5$ なので

$5t=1-t$

$t=\dfrac{1}{6}$

これを⑤へ代入して

$\dfrac{1}{6}=\dfrac{2k}{2+k}$

$2+k=12k$

$k=\dfrac{2}{11}$

なので

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=k:(1-k)=\dfrac{2}{11}:\dfrac{9}{11}=2:9$

よって

$\mathrm{AP}=\dfrac{2}{11}\mathrm{AB}=\dfrac{2}{11}\cdot 3=\underline{\dfrac{6}{11}}$ … [ナ,ニヌ]

〔Ⅲ〕

(1) $a_1 = \underline{\dfrac{3}{7}}$ … [ア,イ]

(2) $a_1 < a_2$ となる組 (a_1, a_2) の総数は，1から7までの自然数のうちから，異なる2数の選び方の総数と等しいので，求める確率は

$\dfrac{{}_7C_2}{7^2} = \underline{\dfrac{3}{7}}$ … [ウ,エ]

(3) $a_1 + a_2 \geqq 5$ となる組 (a_1, a_2) に○印をつけ，○印がついた (a_1, a_2) の中で，$a_1 < a_2$ となるものに×をつけるよう表を作成すると下の図のようになるので，求める確率は

$\underline{\dfrac{19}{43}}$ … [オカ,キク]

$a_1 \backslash a_2$	1	2	3	4	5	6	7
1				⊗	⊗	⊗	⊗
2			⊗	⊗	⊗	⊗	⊗
3		○	○	⊗	⊗	⊗	⊗
4	○	○	○	○	⊗	⊗	⊗
5	○	○	○	○	○	⊗	⊗
6	○	○	○	○	○	○	⊗
7	○	○	○	○	○	○	○

(4) $a_1 + a_2$ が偶数となるのは

・a_1 が偶数であり，かつ a_2 が偶数 ｝※
・a_1 がで奇数あり，かつ a_2 が奇数 ｝

のいずれかの場合より，[ケ]＝②，[コ]＝①

a_1 が偶数である確率を p_1 とすると，$a_1 + a_2$ が偶数となる確率は※より

$p_1 \cdot \dfrac{3}{7} + (1 - p_1) \cdot \dfrac{4}{7} = \underline{\dfrac{3}{7} \cdot p_1 + \dfrac{4}{7} \cdot (1 - p_1)}$ … [サ,シ,ス,セ] … ①

(5) ①同様より

$p_{n+1} = \dfrac{3}{7} \cdot p_n + \dfrac{4}{7} \cdot (1 - p_n) = \underline{\dfrac{4}{7} - \dfrac{1}{7} p_n}$ … [ソ,タ,チ,ツ]

これを変形して

$p_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{7}\left(p_n - \dfrac{1}{2}\right)$

であり

$p_1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{14}$

より

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{14}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\right)^n = \underline{\frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{7}\right)^n\right\}} \quad \cdots \ [テ,ト,ナ,ニ]$$

であり

[ヌ]＝$\underline{④}$

〔Ⅳ〕

$C: y=f(x)=x^3-ax^2-bx+c$

C は $\mathrm{A}(-3,0), \mathrm{B}(3,0)$ を通るので

$$\begin{cases}-27-9a+3b+c=0 & \cdots ① \\ 27-9a-3b+c=0 & \cdots ②\end{cases}$$

①＋②より

$-18a+2c=0$

$c=9a \quad \cdots ③$

①－②より

$-54+6b=0$

$b=\underline{9} \quad \cdots$ [イ]

よって

$f(x)=x^3-ax^2-9x+9a$

$f'(x)=3x^2-2ax-9$

であり，C の $\mathrm{B}(3,0)$ における接線の方程式は

$y=f'(3)(x-3)$

$\quad =(18-6a)(x-3)$

これが点 $(0,c)$ すなわち点 $(0,9a)$ を通るので

$9a=(18-6a)(-3)$

$a=\underline{6} \quad \cdots$ [ア]

③より

$c=\underline{54} \quad \cdots$ [ウエ]

よって

$f(x)=x^3-6x^2-9x+54$

$\qquad =(x+3)(x-3)(x-6)$

であるから，$f(x)=0$ の解で最大のものは

$x=\underline{6} \quad \cdots$ [オ]

$f'(x)=3x^2-12x-9=3(x^2-4x-3)$

であるから

$f'(x)=0$

の解は

$x=\underline{2\pm\sqrt{7}} \quad \cdots$ [カ,キ]

であり，$f(x)$ の増減は右のようになるので

x		$2-\sqrt{7}$		$2+\sqrt{7}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(2-\sqrt{7})$ は $f(x)$ の極大値であるが，最大値ではない．

$f\left(2+\sqrt{7}\right)$は$f(x)$の極小値であるが，最小値ではない．

よって，[ク]＝②，[ケ]＝④

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-6x^2-9x+54\\&=\left(x^2-4x-3\right)(x-2)-14x+48\\&=\frac{1}{3}f'(x)(x-2)-14x+48 \quad \cdots ④\end{aligned}$$

であるから，$f(x)$を$\frac{1}{3}f'(x)$で割った商は，$\underline{x-2}$ … [コ]

余りは $-14x+48$ であるから，[サ]＝⊖，[シ]＝⑦

$f'\left(2-\sqrt{7}\right)=0$ より，④から

$$f\left(2-\sqrt{7}\right)=-14\left(2-\sqrt{7}\right)+48=20+14\sqrt{7}$$

であるから，[ス]＝①, [セ]＝⊖

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}f(x)dx&=\int_{-3}^{3}\left(x^3-6x^2-9x+54\right)dx\\&=2\int_{0}^{3}\left(-6x^2+54\right)dx\\&=2\left[-2x^3+54x\right]_0^3\\&=2(-54+162)\\&=\underline{216} \quad \cdots \text{[ソタチ]}\end{aligned}$$

〔V〕

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)$ $\cdots$ [ア,イ,ウ]

であり，

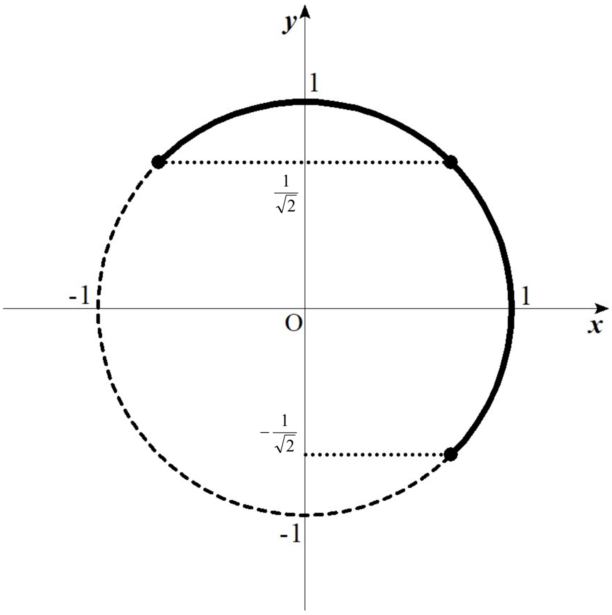
$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{1}{4}\pi\leqq\dfrac{3}{4}\pi \\ \text{なので} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)\leqq 1 \end{array}\right\}\text{(※)}$$

$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)\leqq\sqrt{2}$

$-1\leqq\sin\theta+\cos\theta\leqq\sqrt{2}$

よって，[エ]=⊖，[オ]=⑤



(2) $\sin\theta+\cos\theta=k$ すなわち

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)=k$ $\cdots$ (☆)

ここで(※)より

$\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)$ の取りうる値と

それに対応する θ の個数は

・$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)=1$ の各値となる θ は1個，すなわち

$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)<1$，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$ の各値となる θ は1個

・$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)<1$ の各値となる θ は2個，すなわち

$1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)<\sqrt{2}$ の各値となる θ は2個

・上記以外の範囲，すなわち

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)<-1,\ \sqrt{2}<\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)$ の各値となる θ は0個

これらと(☆)より

・$n=0$ となるのは $k<-1$ または $\sqrt{2}<k$ のとき．

・$n=1$ となるのは $-1\leqq k<1$，$k=\sqrt{2}$ のとき．

・$n=2$ となるのは $1 \leqq k < \sqrt{2}$ のとき.

なので，[カ] = $\underline{⊖}$, [キ] = $\underline{⑤}$, [ク] = $\underline{①}$

(3) $f(\theta)=1+2(\sin\theta+\cos\theta)-2\sin\theta\cos\theta$

$\sin\theta+\cos\theta=t$

としてこの両辺を2乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=t^2$

$\sin\theta\cos\theta=\underline{\dfrac{t^2-1}{2}}$ … [ケ,コ,サ]

であるから

$f(\theta)=1+2t-2\cdot\dfrac{t^2-1}{2}=\underline{-t^2+2t+2}$ … [シ,ス,セ]

$=-(t-1)^2+3$

(1)より，$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ なので，$f(\theta)$は $t=1$ のとき最大値$\underline{3}$ … [ソ]

をとり，そのときのθは

$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)=1$

$\sin\left(\theta+\dfrac{1}{4}\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta+\dfrac{1}{4}\pi \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ より

$\theta+\dfrac{1}{4}\pi=\dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{3}{4}\pi$

$\theta=0, \dfrac{1}{2}\pi$

なので，$f(\theta)=3$ となる $0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすθは $\theta=\underline{\dfrac{1}{2}\pi}$ … [タ,チ]

〔Ⅵ〕

$f(x)=\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x}+3$　（$x\neq 0$，$x\neq 3$）

$f(x)=3$　を解くと

$\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x}+3=3$

$\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x}=0$

$4x-(x-3)=0$

$x=-1$

よって[ア]$=\underline{\ominus}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$，$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$

であるから

[イ]$=\underline{③}$，[ウ]$=\underline{⑧}$

$f'(x)=4\cdot\left\{-(x-3)^2\right\}-\left(-x^{-2}\right)$

$\quad=-\dfrac{4}{(x-3)^2}+\dfrac{1}{x^2}$

$\quad=\underline{\dfrac{(x-3)^2-4x^2}{\{x(x-3)\}^2}}$　⋯ [エ,オ]

$\quad=\dfrac{(x-3)^2-(2x)^2}{\{x(x-3)\}^2}$

$\quad=\dfrac{\{(x-3)-2x\}\{(x-3)+2x\}}{\{x(x-3)\}^2}$

$\quad=\dfrac{-3(x+3)(x-1)}{\{x(x-3)\}^2}$

x		-3		0		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$\frac{8}{3}$	↗	＼	↗	0	↘	＼	↘

より，$f'(x)=0$　となるのは

$x=\underline{-3, 1}$　⋯ [カキ,ク]

のとき．

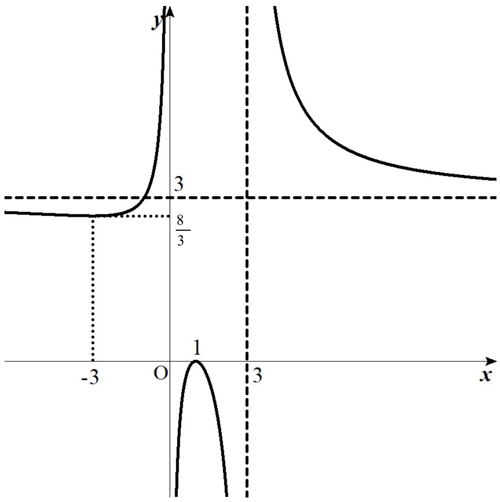
よって，$f(x)$ の増減表は右上のようになり，

$\lim_{x \to -0} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to 3-0} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \to 3+0} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$



なので，$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる.

よって

・$f(-3)$ は $f(x)$ の極小値であるが，最小値ではない.

・$f(1)$ は $f(x)$ の極大値であるが，最大値ではない.

より，[ケ] = ④, [コ] = ②

グラフから，$f(x) = k$ の解の個数 n について

$n = 1$ となる k は小さい順に $0, \frac{8}{3}, 3$ であるから

[サ] = ⑤, [シ] = ⑧, [ス] = ⑨

$0 < k < \frac{8}{3}$ のとき $n = \underline{0}$ … [セ]

$\frac{8}{3} < k < 3$ のとき $n = \underline{2}$ … [ソ]

$y = f(x)$，$x = 1$，$x = 2$，x 軸に囲まれた図形の面積は

$$\int_1^2 \{-f(x)\} dx$$

$$= \int_1^2 \left(-\frac{4}{x-3} + \frac{1}{x} - 3 \right) dx$$

$$= \left[-4\log|x-3| + \log|x| - 3x \right]_1^2$$

$$= (-4\log 1 + \log 2 - 6) - (-4\log 2 + \log 1 - 3)$$

$$= \underline{5\log 2 - 3} \cdots [タ,チ,ツ]$$

〔Ⅶ〕

$f(x)=e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$

$f(0)=e^{2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{-1}$

より，[ア]＝$\underline{②}$

$f'(x)=e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\left\{2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

より，[イ]＝$\underline{⑥}$，[ウ]＝$\underline{④}$

$e>0$ なので，$e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$ は常に正の値をとるので，[エ]＝$\underline{①}$

よって，$f'(x)=0$ となるのは $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ となるときであり，

$0\leqq x\leqq 2\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{6}\leqq x\leqq\dfrac{11}{6}\pi$ なので

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$x=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

のときである．よって $\underline{a=\dfrac{2}{3}\pi}$ … [オ,カ]，$\underline{b=\dfrac{5}{3}\pi}$ … [キ]

$f'(x)=e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\left\{2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

$$f''(x)=e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\left\{2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^2+e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\left\{-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\left\{4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$

$$=2e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\left\langle 2\left\{1-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\rangle$$

$$\underline{=2e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cdot\left\{2-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right\}}\ \cdots\ [ク,ケ,コ]\ \cdots\ (※)$$

$f''(x)=0$ となるのは

$2-\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ すなわち

$2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2=0$

のときで，これを解くと

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

であるが，$-1\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq1$ より

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

ここで

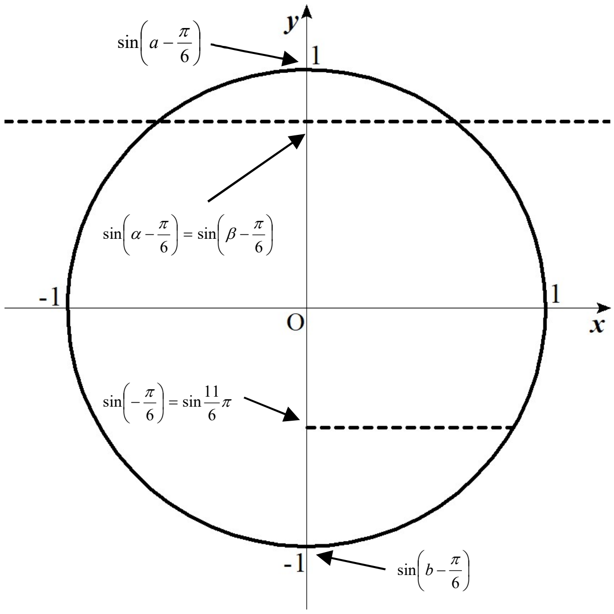
$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{11}{6}\pi=-\dfrac{1}{2}$

$\sin\left(a-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$\sin\left(b-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\dfrac{3}{2}\pi=-1$

であり，

$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}<1$ なので



$\alpha-\dfrac{\pi}{6}<a-\dfrac{\pi}{6}<\beta-\dfrac{\pi}{6}<b-\dfrac{\pi}{6}$

$\alpha<a<\beta<b$

より，[サ]＝③，[シ]＝①，[ス]＝④，[セ]＝②

よって，$f(x)$ の増減表は以下のようになる

x	0		α		a		β		b		2π
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↗		↗		↘		↘		↗	

以上から

・$a<x<b$ において，$f(x)$は常に減少し，Cは変曲点をちょうど1つもつ.

・$b<x<2\pi$ において，$f(x)$は常に増加し，Cは下に凸である.

よって[ソ]＝⑧，[タ]＝②

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}e^{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx$$

とし，$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=t$ とおくと

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)dx=dt$$

であり，xとtの対応は右のようになる.

x	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{3}$
t	$-\dfrac{1}{2}$	$\to$	$\dfrac{1}{2}$

よって

$$K=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{2t}dt=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=\underline{\frac{e^2-1}{2e}}\ \cdots\ [チ,ツ,テ]$$

総 評

〔Ⅰ〕

(1)は対称処理，(2)は3次方程式の解と係数の関係式の問題で，特に難しいというところはない.
(3)は円の中心の位置にすぐ気付けたかで差がついた問題と思われる.

〔Ⅱ〕

平面図形およびベクトルの融合問題であるが，後半まで誘導も親切なので，そこまで難しいところはない.

〔Ⅲ〕

確率と確率漸化式の問題. (3)の条件付き確率の計算が意外と間違えたり，解けなかった受験生が多いのではないかと思う．(4), (5)の誘導も親切すぎるほど丁寧なので，他は特に難しいところはない.

〔Ⅳ〕

3次関数の諸々の問題．極値をとるxが解の公式を要する値の場合，極値は剰余の定理を利用して求めるが，誘導をしてくれているので，それに乗っていけば特に難しいところはないと思われる.

〔Ⅴ〕

三角関数の最大, 最小の標準問題．合成と置き換えを用いた定番の問題で，誘導も親切なので特に難しくないが，[カ], [キ], [ク]あたりは間違えた受験生もいそうである.

〔Ⅵ〕

分数関数の微分および積分の問題．途中の極限計算も大して難しいものはなく，計算が丁寧にできればページ数の割には大したことはしていない平易な問題である.

〔Ⅶ〕

自然対数を底とする指数関数の微分および積分の問題．最初は計算を丁寧にやれば特に難しくないが，[サ]～[セ]を間違えた，もしくは分からなかった受験生もいたのではないだろうか．最後の積分は置換積分のヒントもあるため特に問題なく解けるであろう.