― 芝浦工業大学 ―

2 月 21 日（金）後期日程　数学

解 答・解 説

1.

(1)　$10101.101_{(2)}$

$$=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0+1\cdot 2^{-1}+0\cdot 2^{-2}+1\cdot 2^{-3}$$
$$=16+4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$
$$=\frac{173}{8}$$
$$=\underline{21.625}\ \cdots\ \boxed{（ア）}$$

(2)　$\triangle$ABF, $\triangle$EFH, $\triangle$ADH それぞれにおける三平方の定理から

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\mathrm{FH}=\sqrt{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{7}$$

$$\mathrm{AH}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

であるから，$\triangle$AFH における余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{AFH}=\frac{2^2+\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{7}}=\frac{3}{2\sqrt{7}}=\underline{\frac{3\sqrt{7}}{14}}\ \cdots\ \boxed{（イ）}$$

(3)　正八角形の 8 頂点から 3 頂点を選んで作ることができる三角形は全部で

$${}_8C_3=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2}=56\text{ 個.}$$

これらの三角形は正八角形と辺を

（ｉ）2 辺共有する　　（ii）1辺のみ共有する　　（iii）共有しない

の 3 タイプに分かれる.

（ｉ）のタイプの三角形は，正八角形と角を共有する三角形と考えられるので 8 個.

（ii）のタイプの三角形の作り方は，まず共有する1辺を決め，その辺の端点から，隣りの点以外の残り 1 点を結べばよいので，（ii）のタイプの三角形は

$${}_8C_1\cdot{}_{8-4}C_1=8\cdot 4=32\text{ 個}$$

（iii）は（ｉ），（ii）以外の三角形なので

$$56-(8+32)=\underline{16}\text{個}\ \cdots\ \boxed{（ウ）}$$

(4)　$x^3+ax^2+9x+b=0$ … ①

a, b は実数であり，①の解の1つが $1+2i$ なので，$1-2i$ も解である．

①の残りの解を γ とすると，解と係数の関係式より

$$\begin{cases}(1+2i)+(1-2i)+\gamma=-a\\(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\gamma+\gamma(1+2i)=9\\(1+2i)(1-2i)\gamma=-b\end{cases}$$

$$\begin{cases}2+\gamma=-a\\5+2\gamma=9\\5\gamma=-b\end{cases}$$

これを解くと　$\gamma=2$，$a=-4$，$b=-10$

よって，①の実数解は　$x=\underline{2}$ … $\boxed{\text{（エ）}}$

(5)　$$\begin{cases}a\log_2 a=1 & \cdots ①\\b\log_3 b=1 & \cdots ②\\2c^3+c=2 & \cdots ③\end{cases}$$

①は　$\log_2 a=\dfrac{1}{a}$　より　$\begin{cases}y=\log_2 x\\y=\dfrac{1}{x}\end{cases}$　$(0<x)$ のグラフの交点の x 座標であり，

②は　$\log_3 b=\dfrac{1}{b}$　より　$\begin{cases}y=\log_3 x\\y=\dfrac{1}{x}\end{cases}$　$(0<x)$ のグラフの交点の x 座標である．

よって右図のグラフから

$1<a<b$ …（☆）

また，③は

$\begin{cases}y=2x^3+x\\y=2\end{cases}$　$(0<x)$

のグラフの交点の x 座標で，

$f(x)=2x^3+x$　とおくと

$f'(x)=6x^2+1>0$

より，$f(x)$ は常に単調増加で

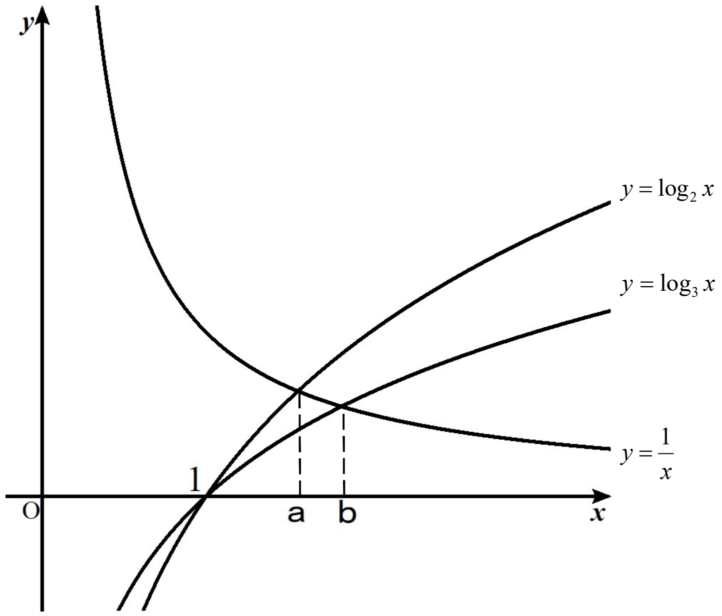
$f(1)=3>2$

より，

$c<1$

これと（☆）から

$\underline{c<a<b}$ … $\boxed{\text{（オ）}}$



2.

$f(x)=4a\sin x-\cos 2x$

(1)　$t=\sin x$　とおくと　$-1 \leqq t \leqq 1$　であり

$\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2t^2$

であるから

$$f(x)=4a\sin x-\cos 2x=4at-(1-2t^2)=\underline{2t^2+4at-1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)}$$

(2)　$f(x)=g(t)$　とすると

$$g(t)=2t^2+4at-1=2(t+a)^2-2a^2-1$$

なので，$g(t)$ の最小値を m とすると

（i）$-a<-1$　すなわち　$1<a$　のとき

$m=g(-1)=-4a+1$

（ii）$-1 \leqq -a \leqq 1$　すなわち　$-1 \leqq a \leqq 1$　のとき

$m=g(-a)=-2a^2-1$

（iii）$1<-a$　すなわち　$a<-1$　のとき

$m=g(1)=4a+1$

以上から $f(x)$ の最小値は $\underline{\begin{cases} -4a+1 & (1<a) \\ -2a^2-1 & (-1 \leqq a \leqq 1) \\ 4a+1 & (a<-1) \end{cases}}$

(3)　$g(t)$ の最大値を M とすると

（i）$-a<0$　すなわち　$0<a$　のとき

$M=g(1)=4a+1$

（ii）$-a=0$　すなわち　$a=0$　のとき

$M=g(-1)=g(1)=1$

（iii）$0<-a$　すなわち　$a<0$　のとき

$M=g(-1)=-4a+1$

以上から　$f(x)$ の最大値は $\underline{\begin{cases} 4a+1 & (0<a) \\ 1 & (a=0) \\ -4a+1 & (a<0) \end{cases}}$

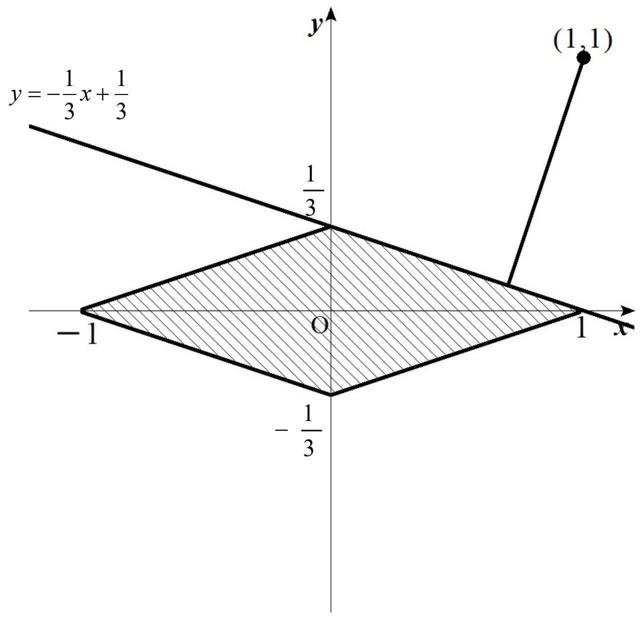
※ $\underline{\begin{cases} 4a+1 & (0 \leqq a) \\ -4a+1 & (a<0) \end{cases}}$ のように，$a=0$　の場合をどちらかにまとめてもよい．

3.

(1) $|x|+3|y|\leqq 1$

を満たす(x,y)の領域をDとすると

Dは右図の境界を含む斜線部である.



このときの$(x-1)^2+(y-1)^2$ の最小値とは，点$(1,1)$とDの第1象限の境界線

$$y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \Leftrightarrow x+3y-1=0$$

の距離の2乗と等しいので，最小値は

$$\left(\frac{|1+3\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+3^2}}\right)^2=\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2$$

$$=\underline{\frac{9}{10}} \quad \cdots \quad \boxed{（ア）}$$

(2) x^n-3を

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

で割った商をQとし，余りを$ax+b$とすると，

$x^n-3=(x-1)(x-2)Q+ax+b$

が成り立っている.

この式に$x=1,2$をそれぞれ代入すると

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ 2a+b=2^n-3 \end{cases}$$

であり，これを解くと

$$\begin{cases} a=2^n-1 \\ b=-2^n-1 \end{cases}$$

よって

$$P_n(x)=(2^n-1)x+(-2^n-1)$$

なので

$$P_n(0)=\underline{-2^n-1} \quad \cdots \quad \boxed{（イ）}$$

(3) $a_{n+1}+a_n=\dfrac{4n^3}{a_{n+1}-a_n}+2$

$$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=4n^3+2(a_{n+1}-a_n)$$

$$a_{n+1}{}^2-a_n{}^2=4n^3+2a_{n+1}-2a_n$$

$$a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}-(a_n{}^2-2a_n)=4n^3 \quad \cdots ①$$

ここで

$b_n=a_n{}^2-2a_n-(n^2-n)^2$　すなわち

$$a_n{}^2-2a_n=b_n+(n^2-n)^2$$

とおくと①は

$$b_{n+1}+\{(n+1)^2-(n+1)\}^2-\{b_n+(n^2-n)^2\}=4n^3$$

$$b_{n+1}-b_n+(n^2+n)^2-(n^2-n)^2=4n^3$$

$$b_{n+1}-b_n+2n^2\cdot 2n=4n^3$$

$$b_{n+1}=b_n$$

となるので

$b_n=b_1=a_1{}^2-2a_1-(1^2-1)^2=1^2-2\cdot 1=\underline{-1}$ … $\boxed{（ウ）}$

よって

$$a_n{}^2-2a_n=-1+(n^2-n)^2$$

$$a_n{}^2-2a_n-(n^2-n+1)(n^2-n-1)=0$$

$$\{a_n-(n^2-n+1)\}\{a_n+(n^2-n-1)\}=0$$

より

$$a_n=n^2-n+1,\ -n^2+n+1$$

$a_n>0$　であるから

$a_n=\underline{n^2-n+1}$ … $\boxed{（エ）}$

(4)　$(2\sin x+\cos x)^3=8\sin^3 x+12\sin^2 x\cos x+6\sin x\cos^2 x+\cos^3 x$

$$=8\sin^3 x+12(1-\cos^2 x)\cos x+6\sin x(1-\sin^2 x)+\cos^3 x$$
$$=2\sin^3 x+6\sin x+12\cos x-11\cos^3 x \quad \cdots \text{①}$$

ここで，$y=\sin x$，$y=\cos x$ のグラフの概形から

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=0,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx=0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx,\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x dx$$

なので，これと①から

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+\cos x)^3 dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(12\cos x-11\cos^3 x)dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{12\cos x-11(1-\sin^2 x)\cos x\}dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+11\sin^2 x\cos x)dx$$
$$=2\left[\sin x+\frac{11}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\left(1+\frac{11}{3}\cdot 1^3\right)$$
$$=\underline{\frac{28}{3}} \quad \cdots \boxed{\text{（オ）}}$$

4.

(1) $\int xe^{kx}dx = \int x\cdot\left(\frac{1}{k}e^{kx}\right)'dx$

$$= x\cdot\frac{1}{k}e^{kx} - \int\frac{1}{k}e^{kx}dx$$

$$= \underline{\frac{1}{k}xe^{kx} - \frac{1}{k^2}e^{kx} + C}\ \text{（C は積分定数）}$$

(2) $V(a) = \pi\int_a^{a+\log 2}\left(\sqrt{x}e^{-x}\right)^2dx = \pi\int_a^{a+\log 2}xe^{-2x}dx$

(1)の結果より

$$V(a) = \pi\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_a^{a+\log 2}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left[(2x+1)e^{-2x}\right]_a^{a+\log 2}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left\{(2a+2\log 2+1)e^{-2a-2\log 2} - (2a+1)e^{-2a}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left\{(2a+2\log 2+1)e^{-2a}\cdot e^{\log\frac{1}{4}} - (2a+1)e^{-2a}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{4}(2a+2\log 2+1)e^{-2a} - (2a+1)e^{-2a}\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{16}\left\{(2a+2\log 2+1) - (8a+4)\right\}e^{-2a}$$

$$= -\frac{\pi}{16}(-6a+2\log 2-3)e^{-2a}$$

$$= \underline{\frac{\pi}{16}(6a-2\log 2+3)e^{-2a}}$$

(3) $V'(a) = \frac{\pi}{16}\left\{6e^{-2a} + (6a-2\log 2+3)\cdot\left(-2e^{-2a}\right)\right\}$

$$= \frac{\pi}{16}(-12a+4\log 2)e^{-2a}$$

$$= \frac{\pi}{4}(-3a+\log 2)e^{-2a}$$

であるから，$V(a)$の増減は右図.

a		a	
$V'(a)$	＋	$\frac{1}{3}\log 2$	－
$V(a)$	↗	最大	↘

よって$V(a)$の最大値は

$$V\left(\frac{1}{3}\log 2\right)=\frac{\pi}{16}\left(6\cdot\frac{1}{3}\log 2-2\log 2+3\right)e^{-2\cdot\frac{1}{3}\log 2}$$

$$=\frac{\pi}{16}\cdot 3\cdot e^{\log 2^{-\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{3\pi}{16}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\underline{\frac{3\pi}{16\cdot\sqrt[3]{4}}}$$

総 評

1.

(1)～(4)はいずれも基本問題のレベルで，落としたくない問題である．(5)は分からない受験生も多かったように思える．

2.

三角関数の問題のようであるが，置き換え後はただの二次関数の最大，最小問題である．いわゆる「軸の移動問題」であり，軸：$t=-a$ と定義域 $-1 \leqq t \leqq 1$ の位置関係によって場合分けが必要な問題である．きちんと対策ができていればさほど難しい単元ではないが，苦手とする受験生もそこそこいる問題である．

3.

(1), (2)は得点したいが，(1)の $|x|+3|y| \leqq 1$ の領域がすぐにイメージできるかどうかの差は大きい．

(3)は若干計算が面倒そうに見えるが，誘導もあり，綺麗な値にはなるので $\boxed{\text{（ウ）}}$ までは得点したい．$\boxed{\text{（エ）}}$ は a_n の二次方程式なので，因数分解くらいしかないのだが，気づけない受験生も多く，差のついた問題ではないだろうか．
(4)は丁寧に計算すれば正攻法でもできなくはないが，やはり積分区間が正負逆の値であることと，三角関数であることから，面積の相殺と 2 倍を上手に利用して計算量を減らすことはしたい．

4.

回転体の体積とその最大値の問題であるが，(1)で誘導もされており，途中若干計算が面倒なところはあるものの，基本的な知識と計算力がついていれば，特に難しいところはないように思う．計算力勝負といったところ．