― 東京工科大学 ―

1 月 27 日　一般選抜奨学生 入試グループＡ　数学

解 答・解 説

1

(1) 17 と 23 は互いに素であるから、

$$n(A\cap B)=\left[\frac{10000}{17\cdot 23}\right]=\left[\frac{10000}{391}\right]=\underline{25}\ \cdots\ \boxed{アイ}$$

$$n(A)=\left[\frac{10000}{17}\right]=588、\ n(B)=\left[\frac{10000}{23}\right]=434\ \text{より}$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=588+434-25=\underline{997}\ \cdots\ \boxed{ウエオ}$$

※ $[x]$はxを越えない最大の整数

(2) $x=\log_{\sqrt{8}}125$ のとき

$$\left(\sqrt{8}\right)^x=125$$

$$\left(2^x\right)^{\frac{3}{2}}=5^3$$

より

$$2^x=\left(5^3\right)^{\frac{2}{3}}=5^2=\underline{25}\ \cdots\ \boxed{カキ}$$

よって

$$\begin{aligned}x=\log_2 25=\log_2 5^2=2\log_2 5=2\cdot\frac{\log_{10}5}{\log_{10}2}&=2\cdot\frac{\log_{10}\frac{10}{2}}{\log_{10}2}\\&=2\cdot\frac{\log_{10}10-\log_{10}2}{\log_{10}2}\\&=2\cdot\frac{1-\log_{10}2}{\log_{10}2}\\&=2\left(\frac{1}{\log_{10}2}-1\right)\ \cdots\ ①\end{aligned}$$

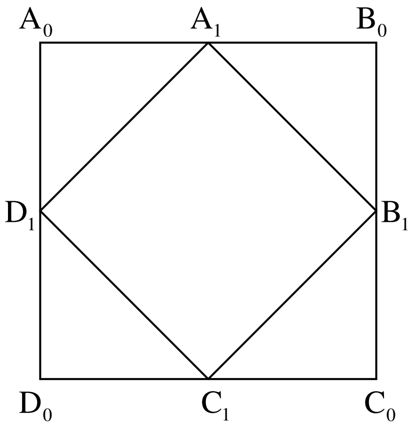
ここで

$$\frac{1}{\log_{10}2}=\frac{1}{0.3010}=3.322\cdots$$ であるから①より

$$x=2(3.322\cdots-1)=2\times 2.322=4.64\cdots$$

なので、この小数点第 2 位を四捨五入すると

$$x=\underline{4.6}\ \cdots\ \boxed{クケ}$$



(3) 右図のように四角形 $A_1B_1C_1D_1$ は正方形となり、面積は正方形 $A_0B_0C_0D_0$ の半分になる。よって

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\underline{\frac{1}{2}}\quad\cdots\ \boxed{アイ}$$

$A_0B_0C_0D_0$ を $A_nB_nC_nD_n$ 、 $A_1B_1C_1D_1$ を $A_nB_nC_nD_n$ と置き換えても全く同様なので、すべての n において

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}S_n$$

が成り立つので

$$S_n=S_1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

であるから

$$S_3=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}=\underline{\frac{1}{8}}\quad\cdots\ \boxed{シス}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}S_k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\underline{1}\quad\cdots\ \boxed{セ}$$

面積比と相似比の関係から

$$l_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}}l_n=\frac{\sqrt{2}}{2}l_n$$

であり、正方形 $A_0B_0C_0D_0$ の周の長さは 4 より

$$l_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot4=2\sqrt{2}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{\infty}l_k=\frac{2\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{4\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}{4-2}=2\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)=\underline{4\sqrt{2}+4}\quad\cdots\ \boxed{ソタチ}$$

2

(1) q が偶数になるのは、3 つのさいころのうちの 1 つでも目が偶数であればよい、すなわち「3 つのさいころがすべて奇数の目」の余事象であるから、その確率は

$$1-\left(\frac{3}{6}\right)^3=1-\frac{1}{8}=\underline{\frac{7}{8}} \quad \cdots \boxed{\text{アイ}}$$

p が奇数となるのは、3 つのさいころの目が「3 つとも奇数」か「1 つが奇数、2 つが偶数」のいずれかの場合である。よってその確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3+\frac{3!}{1!2!}\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\underline{\frac{1}{2}} \quad \cdots \boxed{\text{ウエ}}$$

さいころの目は 1~6 より $3 \leqq p \leqq 18$ であり、$\dfrac{p}{q}$ が整数になるにはまず $q \leqq p$ となる必要がある。

よって、少なくとも $q \leqq 18$ となる 3 つのさいころの目の組合せは

$(1,1,1)$、$(1,1,2)$、$(1,1,3)$、$(1,1,4)$、$(1,1,5)$、$(1,1,6)$、$(1,2,2)$、$(1,2,3)$、$(1,2,4)$、$(1,2,5)$、$(1,2,6)$、$(1,3,3)$、$(1,3,4)$、$(1,3,5)$、$(1,3,6)$、$(1,4,4)$、$(2,2,2)$、$(2,2,3)$、$(2,2,4)$、$(2,3,3)$

である。

このうちで $\dfrac{p}{q}$ が整数になるのは $(1,1,1)$、$(1,1,2)$、$(1,2,3)$ の 3 組である。

- $(1,1,1)$ の組合せの目の出方は 1 通り
- $(1,1,2)$ の組合せの目の出方は 3 通り
- $(1,2,3)$ の組合せの目の出方は 6 通り

であるから、$\dfrac{p}{q}$ が整数になる確率は

$$\frac{1+3+6}{6^3}=\underline{\frac{5}{108}} \quad \cdots \boxed{\text{オカキク}}$$

(2) $2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}+4\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ より

$$2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\left(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+\left(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)+4\left(-\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=\vec{0}$$

$$10\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} \quad \cdots \boxed{\text{ケ〜タ}}$$

Q は直線 AP 上の点であるから、k を定数として

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\left(\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \quad \cdots ①$$

とおけ、また Q は平面 BCD 上の点でもあるから①より

$$k\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\right)=1 \quad \text{なので} \quad k=\frac{5}{4}$$

よって①から

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\quad\cdots\ \boxed{チツ}$$

$$=\frac{5}{4}\left(\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

であるから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\frac{1}{8}\left|3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\quad\cdots\ ②$$

であり

$$\left|3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=9\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2+16\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+6\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+8\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+24\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\quad\cdots\ ③$$

ここで四面体 ABCD は 1 辺の長さが 8 の正四面体なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=8^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=8\cdot 8\cdot\cos\frac{\pi}{3}=8^2\cdot\frac{1}{2}$$

なので③から

$$\left|3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=(9+1+16)\cdot 8^2+(6+8+24)\cdot 8^2\cdot\frac{1}{2}=45\cdot 8^2$$

よって

$$\left|3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+4\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\sqrt{45\cdot 8^2}=24\sqrt{5}$$

なので②から

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|=\frac{1}{8}\cdot 24\sqrt{5}=\underline{3\sqrt{5}}\quad\cdots\ \boxed{テト}$$ の空欄に合わない！

3

(1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x(x+3)}$

x		-3		α		0		β	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f'(x)=\frac{1\cdot x(x+3)-(x-3)(2x+3)}{\{x(x+3)\}^2}\quad\cdots\text{①}$$

$$=\frac{-x^2+6x+9}{\{x(x+3)\}^2}$$

$$=-\frac{x^2-6x-9}{\{x(x+3)\}^2}$$

ここで

$x^2-6x-9=0$ を解くと

$x=3\pm3\sqrt{2}$

なので、$\alpha=3-3\sqrt{2}$、$\beta=3+3\sqrt{2}$ として、$f(x)$の増減表は上のようになる。

よって $f(x)$ は

$x=\alpha=\underline{3-3\sqrt{2}}$ $\cdots$ $\boxed{\text{アイウ}}$

のとき極小値をとり、その値は

$$f(3-3\sqrt{2})=\frac{(3-3\sqrt{2})-3}{(3-3\sqrt{2})\{(3-3\sqrt{2})+3\}}=\frac{-3\sqrt{2}}{(3-3\sqrt{2})(6-3\sqrt{2})}=\frac{-3\sqrt{2}}{36-27\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3(3\sqrt{2}-4)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{3(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}$$

$$=\frac{6+4\sqrt{2}}{3(18-16)}$$

$$=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\quad\cdots\ \boxed{\text{エ～キ}}$$

(2) ①より

$$f'(x)=\frac{1}{x(x+3)}-\frac{2x+3}{x(x+3)}\cdot\frac{x-3}{x(x+3)}=\frac{1}{x(x+3)}-\frac{2x+3}{x(x+3)}f(x)$$

なので

$$x(x+3)f'(x)=1-(2x+3)f(x)$$

この両辺を x について微分すると

$$(2x+3)f'(x)+x(x+3)f''(x)=-2f(x)-(2x+3)f'(x)$$

$$\underline{x(x+3)f''(x)+(4x+6)f'(x)+2f(x)=0}\quad\cdots\ \boxed{\text{クケコ}}$$

より、x の値に関わらずこの等式が常に成り立つ。

(3) $\begin{cases} y=f(x) \\ y=ax \end{cases}$ の共有点の x 座標は

$\dfrac{x-3}{x(x+3)}=ax$ の実数解で、この式を整理すると

$$a=\frac{x-3}{x^2(x+3)}$$

ここで $g(x)=\dfrac{x-3}{x^2(x+3)}$ とすると

$$g'(x)=\frac{1\cdot x^2(x+3)-(x-3)(3x^2+6x)}{\{x^2(x+3)\}^2}=\frac{-2x^3+6x^2+18x}{\{x^2(x+3)\}^2}=\frac{-2(x^2-3x-9)}{x^3(x+3)^2}$$

ここで $x^2-3x-9=0$ … ② を解くと

$$x=\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$$

このとき②、すなわち $x^2=3x+9$ を満たすので

$$g(x)=\frac{x-3}{(3x+9)(x+3)}=\frac{x-3}{3(x^2+6x+9)}=\frac{x-3}{3\{(3x+9)+6x+9\}}=\frac{x-3}{27(x+2)}=\frac{1}{27}\left(1-\frac{5}{x+2}\right)$$

より

$$g\left(\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{27}\left(1-\frac{5}{\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}+2}\right)=\frac{1}{27}\left(1-\frac{10}{7\pm3\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{27}\left\{1-\frac{10(7\mp3\sqrt{5})}{(7\pm3\sqrt{5})(7\mp3\sqrt{5})}\right\}$$

$$=\frac{1}{27}\left\{1-\frac{10(7\mp3\sqrt{5})}{49-45}\right\}$$

$$=\frac{1}{27}\left\{1-\frac{5(7\mp3\sqrt{5})}{2}\right\}$$

$$=\frac{-11\pm5\sqrt{5}}{18}$$ (複合同順)

なので、$g(x)$ の増減および $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。

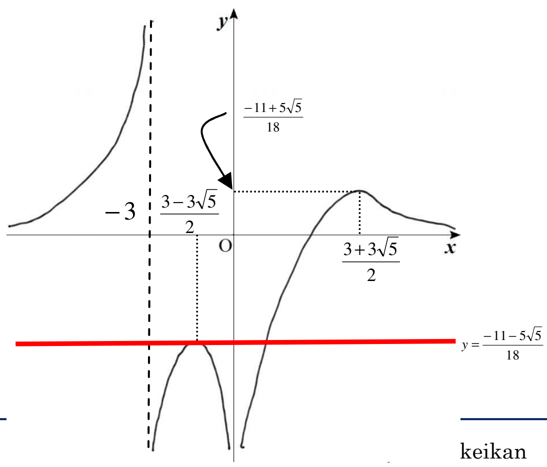
x		-3		$\frac{3-3\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$	
$g'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$g(x)$	↗		↗	$\frac{-11-5\sqrt{5}}{18}$	↘		↗	$\frac{-11+5\sqrt{5}}{18}$	↘

よって $\begin{cases} y=f(x) \\ y=ax \end{cases}$ の共有点が 2 個となるのは

$a=\dfrac{-11\pm5\sqrt{5}}{18}$ … $\boxed{\text{サ〜タ}}$

のときである。

$a<0$ すなわち $a=\dfrac{-11-5\sqrt{5}}{18}$



のときの共有点の x 座標のうちで

小さい方の値はグラフより

$\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}$ … チ～ト

総 評

1

基本レベルの易しめの問題である。(2)の計算を丁寧にすること以外とくに注意することもなく、各出題分野の基礎が身についていれば困ることはないであろう。

2

(1)

q が偶数となる確率と p が奇数になる確率は基本的な内容であるが、最後の $\dfrac{p}{q}$ が整数になる確率で手が止まった受験生はいるように思う。とはいえ、解答の通り $q \leqq 18$ となる組合せに絞って考えればそれほど難しい内容ではない。

(2)

空間ベクトルの基本問題。入試問題集などでも同様の問題はよく見かける。

ただし、計算が若干煩雑になりやすいので、上手な計算の工夫をして計算ミスをしないようにしたい。

3

(1)

基本的な計算問題。

(2)

$f''(x)$ を直に求めてやろうとすると、とんでもなく面倒な計算となってしまう。

解答の通り、(1)における $f'(x)$ の計算式を $f(x)$ で表した式に直し、その式を x について微分することで $f(x),\ f'(x),\ f''(x)$ の関係式を導くのが楽。

この問題を直に計算して時間をロスしたり、計算が合わなかった受験生も多そうである。

(3)

問題の内容自体は比較的よく見かけるタイプであるが、極値を求めるところの計算が若干面倒である。

解答の通り、$x=\dfrac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$ が $x^2-3x-9=0$ の解であることから、次数下げをしたのちに代入、計算するのが良いであろう。

この問題も計算でミスをした受験生も多そうである。