― 千葉工業大学 ―

1 月 31 日（日）一般選抜 A 日程　数学

解 答・解 説

1

(1) $(2+3i)x+(1-5i)yi=6-4i$

$(2x+5y)+(3x+y)i=6-4i$

実部と虚部の比較より

$\begin{cases}2x+5y=6\\3x+y=-4\end{cases}$

これを解いて　$x=\underline{-2}\,,\,y=\underline{2}$　$\cdots$ $\boxed{アイ,ウ}$

(2) $x^2+(a+2)x+2a+1=0$　の判別式を D とすると、$D>0$　であればよいから

$(a+2)^2-4\cdot1\cdot(2a+1)>0$

$a^2-4a>0$

$a(a-4)>0$

$a<\underline{0},\underline{4}<a$　$\cdots$ $\boxed{エ,オ}$

(3) 余弦定理より

$$\cos A=\frac{7^2+5^2-(4\sqrt{2})^2}{2\cdot7\cdot5}=\frac{\underline{3}}{\underline{5}}\quad\cdots\ \boxed{カ,キ}$$

$0<\sin A$　であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

なので、

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\frac{4}{5}=\underline{14}\quad\cdots\ \boxed{クケ}$$

(4) 平均値は

$$\frac{1}{5}\{3+4+6+x+(12-x)\}=\underline{5}\quad\cdots\ \boxed{コ}$$

分散を s^2 とすると

$$s^2=\frac{1}{5}\left\langle(3-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(x-5)^2+\{(12-x)-5\}^2\right\rangle$$
$$=\frac{2}{5}(x^2-12x+40)$$

$$=\frac{2}{5}\left\{(x-6)^2+4\right\}$$
$$=\frac{2}{5}(x-6)^2+\frac{8}{5}$$

であるから,分散の最小値は $\underline{\dfrac{8}{5}}$ … $\boxed{サ,シ}$

(5) $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=4\cdot 3^2-4\cdot 8+4^2=20$

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|>0$ より

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\underline{2\sqrt{5}}$ … $\boxed{ス,セ}$

(6) $8^x=\sqrt[3]{\dfrac{4^{2x+3}}{2^{x-1}}}$

$$\left(2^3\right)^x=\left\{\frac{\left(2^2\right)^{2x+3}}{2^{x-1}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$2^{3x}=\left(2^{3x+7}\right)^{\frac{1}{3}}$$

この両辺を3乗して

$$2^{9x}=2^{3x+7}$$

指数の比較より

$$9x=3x+7$$

$x=\underline{\dfrac{7}{6}}$ … $\boxed{ソ,タ}$

(7) $\left(\dfrac{1}{2}\log_8 4-\log_8 18\right)\cdot\log_3 4=\left(\log_8 2-\log_8 18\right)\cdot\log_3 4=\log_8\dfrac{1}{9}\cdot\log_3 4$

$$=\frac{\log_2\frac{1}{9}}{\log_2 8}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 3}$$
$$=\frac{\log_2 3^{-2}}{3}\cdot\frac{2}{\log_2 3}$$
$$=\frac{-2\log_2 3}{3}\cdot\frac{2}{\log_2 3}$$

$=\underline{\dfrac{-4}{3}}$ … $\boxed{チツ,テ}$

(8) $f(x)=x^3+4x^2-3x+a$

$f'(x)=3x^2+8x-3=(3x-1)(x+3)$

であるから, $f(x)$ の増減表は右図。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値が20であるから

$f(-3)=20$

$-27+36+9+a=20$

$a=\underline{2}$ $\cdots$ $\boxed{\text{ト}}$

極小値は

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{27}+\dfrac{4}{9}-1+2=\dfrac{40}{\underline{27}}$ $\cdots$ $\boxed{\text{ナニ,ヌネ}}$

2

(1) △ABP におけるメネラウスの定理より

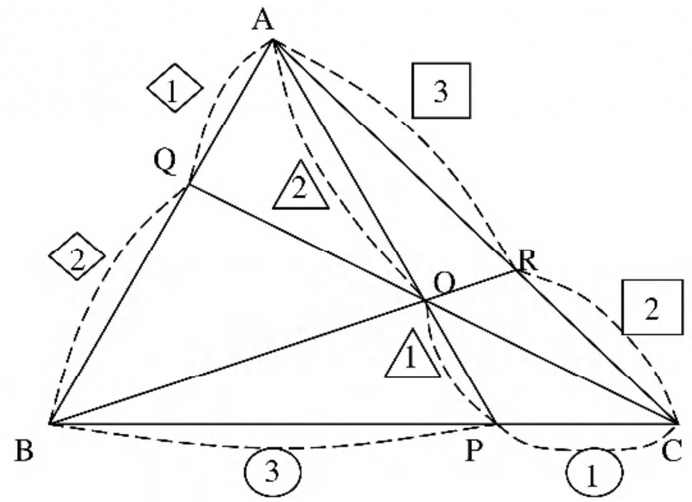
$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{1}{2}\quad\cdots\quad\boxed{ア,イ}$$

△ABC におけるチェバの定理より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

$$\frac{CR}{RA}=\frac{2}{3}\quad\cdots\quad\boxed{ウ,エ}$$



$\triangle ABC=S$　とすると

・$\triangle AQR=\frac{AQ}{AB}\cdot\frac{AR}{AC}\cdot S=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot S=\frac{1}{5}S$

・$\triangle BPQ=\frac{BQ}{BA}\cdot\frac{BP}{BC}\cdot S=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot S=\frac{1}{2}S$

・$\triangle CRP=\frac{CP}{CB}\cdot\frac{CR}{CA}\cdot S=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot S=\frac{1}{10}S$

であるから

$$\triangle PQR=\triangle ABC-\triangle AQR-\triangle BPQ-\triangle CRP=S-\frac{1}{5}S-\frac{1}{2}S-\frac{1}{10}S=\frac{1}{5}S$$

なので, △PQR の面積は△ABC の$\frac{1}{5}$倍　…　$\boxed{オ,カ}$

(2) 事象 P , Q , R をそれぞれ

・P :左から 1 枚目と 2 枚目のカードを選ぶ

・Q :左から 2 枚目と 3 枚目のカードを選ぶ

・R :左から 3 枚目と 4 枚目のカードを選ぶ

とすると, $\boxed{\mathrm{M}}$ が一度も交換されないような事象の組合せは

「3 回とも Q 」,「2 回が Q ,1 回が R 」,「1 回が Q ,2 回が R 」,「3 回とも R 」

のいずれかのときであるから、その確率は

$$\begin{aligned}\frac{3!}{3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3!}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3!}{3!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3&=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3\cdot3}+\frac{1}{2^3\cdot3^3}\\&=\frac{27+27+9+1}{2^3\cdot3^3}\\&=\frac{64}{2^3\cdot3^3}\\&=\frac{8}{27}\quad\cdots\quad\boxed{キ,クケ}\end{aligned}$$

3 回目の操作後に, $\boxed{\text{M}}$ が最初と同じ位置にあるには,

(ｉ) $\boxed{\text{M}}$ が一度も交換されない

(ⅱ) 3 回の事象の順番が「PPQ」,「PPR」,「PRP」,「QPP」,「RPP」のいずれか

のどちらかであればよい。

(ｉ) の確率は先ほど求めた $\dfrac{8}{27}$

(ⅱ)の確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3+1+1+3+1}{2\cdot 3^3}$$

$$=\frac{9}{2\cdot 3^3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

であるから,求める確率は

$$\frac{8}{27}+\frac{1}{6}=\frac{25}{54}\quad\cdots\ \boxed{\text{コサ,シス}}$$

この計算から、3 回目の操作後に, $\boxed{\text{M}}$ が最初と同じ位置にあったときに,少なくとも 1 回は $\boxed{\text{M}}$ が交換されている条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{54}}=\frac{9}{25}\quad\cdots\ \boxed{\text{セ,ソタ}}$$

3

(1) $F = 3\sin x + 6\sin\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$

加法定理より

$$F = 3\sin x + 6\left(\sin\frac{2}{3}\pi\cos x - \cos\frac{2}{3}\pi\sin x\right)$$
$$= 3\sin x + 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$
$$= \underline{6}\sin x + \underline{3\sqrt{3}}\cos x \quad \cdots \quad \boxed{ア,イ,ウ}$$

α を $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}, \cos\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ となる角度とすると

$F = 3\sqrt{7}\sin(\alpha + x)$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-1 \leqq \sin(\alpha + x) \leqq 1$ であるから，F の最大値は $\underline{3\sqrt{7}}$ $\cdots$ $\boxed{エ,オ}$

であり，このとき $\alpha + x = \frac{\pi}{2}$ より

$x = \frac{\pi}{2} - \alpha$

なので

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$
$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

より

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{21}}{7} = \underline{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

(2) 仮定の数列は第 k 群が初項 $k-3$,公差 2 の k 個の項からなる等差数列をなすので，その最後の項は

$k - 3 + (k-1)\cdot 2 = 3k - 5$ $\cdots$ $\boxed{ケ,コ}$

よって第 k 群の項の総和は

$$\frac{k\{(k-3)+(3k-5)\}}{2} = \underline{2k^2 - 4k} \quad \cdots \quad \boxed{サ,シ,ス}$$

$b_k = 3k - 5$

とすると，b_k が 26 を超える最小の偶数となるのは $k = 11$ のときで，このとき

第 11 群は最初の項から順に

$8, 10, 12, \cdots, 26, 28$

の 11 個の項からなるので，$\{a_n\}$ で最初に 26 が登場するのは第 11 群の 10 番目である。

よって

$n=\sum_{k=1}^{10}k+10=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(10+1)+10=\underline{65}$ … $\boxed{\text{セソ}}$

よって a_1 から a_{65} までの和は

$$\sum_{k=1}^{11}(2k^2-4k)-a_{66}=2\cdot\frac{1}{6}\cdot 11\cdot(11+1)\cdot(2\cdot 11+1)-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 11\cdot(11+1)-28$$

$$=11\cdot 4\cdot 23-2\cdot 11\cdot 12-28$$

$$=\underline{720}\ \cdots\ \boxed{\text{タチツ}}$$

4

(1)　$\mathrm{A}(0,2)$であるから，lの方程式は

$$y=\frac{\frac{1}{6}p^2+2-2}{p-0}(x-0)+2=\underline{\frac{1}{6}}px+\underline{2}\quad\cdots\quad\boxed{ア,イ,ウ}$$

$l\perp m$より，mの傾きは$-\dfrac{6}{p}$であり，mは点$\mathrm{Q}(p,0)$を通るので，mの方程式は

$$y=-\frac{6}{p}(x-p)=\underline{\frac{-6}{p}}x+\underline{6}\quad\cdots\quad\boxed{エオ,カ}$$

$p>0$　なので，Rのy座標は常に正となる。ここで点$R(X,Y)$とすると，

$$\begin{cases}Y=\dfrac{1}{6}pX+2 & \cdots\ ①\\[2mm] Y=-\dfrac{6}{p}X+6 & \cdots\ ②\end{cases}$$

を満たし、$X=0$　を①,②へ代入すると２式は一致しないので　$X\neq 0$　より①から

$$p=\frac{6(Y-2)}{X}$$

これを②へ代入すると

$$Y=-6\cdot\frac{X}{6(Y-2)}\cdot X+6$$
$$Y(Y-2)=-X^2+6(Y-2)$$
$$X^2+Y^2-8Y=-12$$
$$X^2+(Y-4)^2=4$$

であるから，点Rの軌跡は中心$\underline{(0,4)}$,半径$\underline{2}$の円となる。　…　$\boxed{キ,ク,ケ}$

よって点Rはこの円周上の点である。

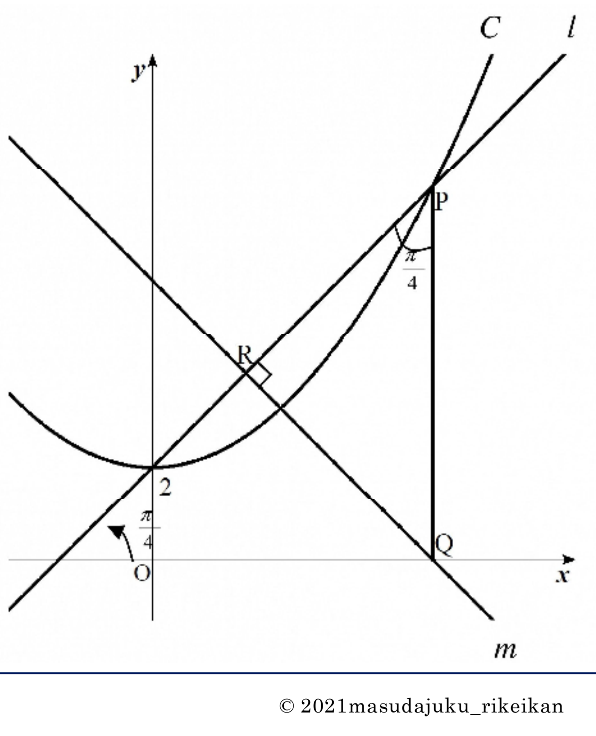
(2)　$\mathrm{PR}\perp\mathrm{QR}$であるから，$\triangle\mathrm{PRQ}$が二等辺三角形になるとき，$\triangle\mathrm{PRQ}$は$\mathrm{PR}=\mathrm{QR}$の直角二等辺三角形になる。

よってこのとき$\angle\mathrm{RPQ}=\dfrac{\pi}{4}$であり，QPは$y$軸に平行なので右図のように$l$が$x$軸から正方向になす角は$\dfrac{\pi}{4}$となるので

$$\frac{1}{6}p=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

よって

$$p=\underline{6}\quad\cdots\quad\boxed{コ}$$



$\mathrm{PQ}=2\mathrm{RQ}$ となるとき，$\triangle\mathrm{PRQ}$ は $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$，

$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{RPQ}=\dfrac{\pi}{6}$ の直角三角形である。

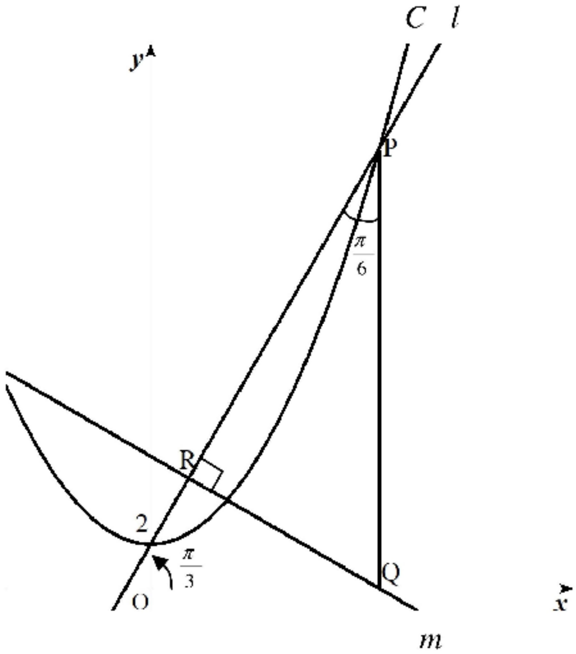
このとき右図のように l が x 軸から正方向にな

す角は $\dfrac{\pi}{3}$ となるので

$$\frac{p}{6}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

よって

$p=\underline{6\sqrt{3}}$ … $\boxed{\text{サ,シ}}$



(3) $p=6\sqrt{3}$ のとき

$$\begin{cases} l: y=\sqrt{3}x+2 \\ m: y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+6 \end{cases}$$

で，R はこの交点よりこの連立方程式を解いて

$\mathrm{R}\left(\sqrt{3},5\right)$

K の中心を K とすると，KR の傾きが

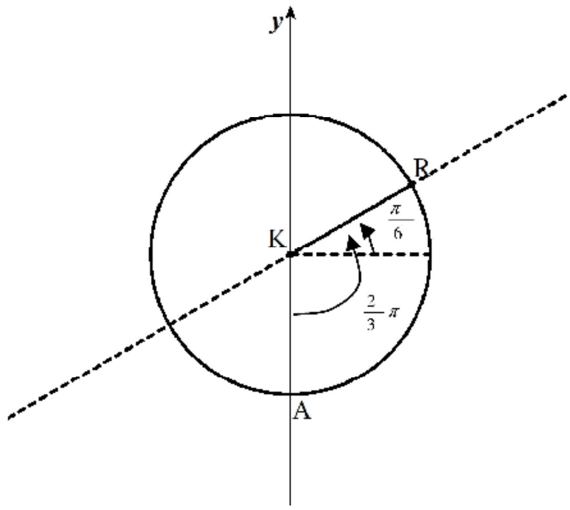
$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{6}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{AKR}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$$

よって，弧 AR と l で囲まれた図形の面積は

$\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\underline{\dfrac{4}{3}}\pi-\underline{\sqrt{3}}$ … $\boxed{\text{ス,セ,ソ}}$



(4)　$p=6$ のとき $\mathrm{P}(6,8)$ であり,また

$$\begin{cases} l: y = x+2 \\ m: y = -x+6 \end{cases}$$

である。

このときの l , m の交点 R は $\mathrm{R}(2,4)$

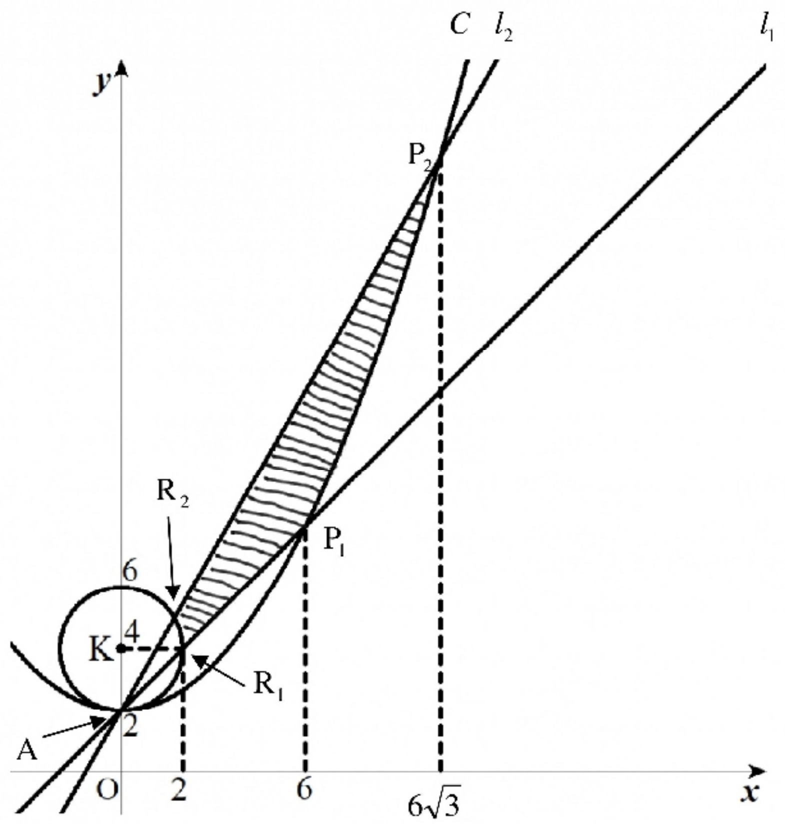
$p=6$ のときの l を l_1 , R を R_1 ,

$p=6\sqrt{3}$ のときの l を l_2 , R を R_2

とする。

このとき求める面積は右図の

斜線部の面積。ここで、



・ C と l_1 で囲む図形の面積は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6^3 = 6 \quad \cdots\ (※)$$

・ C と l_2 で囲む図形の面積は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(6\sqrt{3}\right)^3 = 18\sqrt{3} \quad \cdots\ (※)$$

・ AR_1 と K で囲む図形の面積は

$$\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\pi - \frac{1}{2}\cdot 2^2 = \pi - 2$$

・ AR_2 と K で囲む図形の面積は

(3)より $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

であるから,求める領域の面積は

$$18\sqrt{3} - 6 - \left\{\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) - (\pi - 2)\right\} = \underline{19\sqrt{3} - 8 - \frac{1}{3}\pi}$$

(※)は記述ではないため 1/6 面積公式を用いた.

総 評

1

どれも各出題分野の基本的な問題ばかりである。計算もそこまでややこしいものはない為,何としても完答したい。

2

(1)

チェバ,メネラウスの定理を利用する典型的な図形問題。後半の面積は一度この計算をしたことがないと足止めをくらったり,解けなかったという受験生もいそうである。

(2)

確率の標準的な問題であるが,事象の組み合わせ(順番)の数えこぼしがないように注意したい。また、最後は条件付き確率の問題であるが,それまでの問題ですでに必要な確率はすべて求まっているはずなので、きちんと条件付き確率の計算を理解できていればとくに問題はないであろう。

3

(1)

三角関数の基本～標準レベルの問題。後半の $\sin 2x$ を求める問題は力ずくでできないことはないが, $x=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ と気づければ時間もかからずきれいに解ける。

(2)

群数列の標準問題。誘導が比較的丁寧なので,群数列の典型問題の解法が身についていれば解き方に迷うことはほとんどないと思う。ただし,最初に 26 となる項を探すところではつまづいた受験生もそこそこいそうである。

4

全体的に難しい。

(1)のＲの軌跡は l と m の交点を求めて, p の媒介変数表示にし,そこから p を消そうとすると,かなり遠回りになる。このＲの軌跡からつまづいた受験生も多いと思う。

(2)も直角三角形の概形と QP は y 軸に平行ということに目をつけて,直線の傾きから考えないとかなり大変な目に合う。これもやや難しい。

(3)は(2)までがきちんと解け,グラフのイメージもしっかりできていれば、この問題群のなかでは易しい。
(4)は領域のイメージがしっかりできたうえで,面積計算も工夫をして解かなくてはならず,これもかなり計算がややこしい。

$\boxed{1}$,$\boxed{2}$,$\boxed{3}$が基本～標準レベルの内容であることに対して$\boxed{4}$は明らかに難しく,解答時間が足りなかった受験生も多かったのではないだろうか。

そのため,$\boxed{1}$～$\boxed{3}$でどれだけ得点できているかが重要になると思われる。