― 芝浦工業大学 ―

2 月 4 日（木）全学統一日程　数学

解 答・解 説

1.

(1) $5^1 \equiv 5 \pmod 7$

$5^2 \equiv 25 \equiv 4 \pmod 7$

$5^3 \equiv 20 \equiv 6 \pmod 7$

$5^4 \equiv 30 \equiv 2 \pmod 7$

$5^5 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7$

$5^6 \equiv 15 \equiv 1 \pmod 7$

なので、m を自然数として $5^m \equiv 5^{m+6} \pmod 7$ であり、$5^2 \equiv 4 \pmod 7$ より

$5^n \equiv 4 \pmod 7$ となる n は初項 2、公差 6 の等差数列をなす。

k を自然数として

$2+(k-1)\cdot 6<100$　を解くと

$k<\dfrac{52}{3}=17.3\cdots$

であるから、求める n の個数は17 個 … $\boxed{(ア)}$

(2) $\dfrac{3}{4-\sqrt{13}}=\dfrac{3(4+\sqrt{13})}{(4-\sqrt{13})(4+\sqrt{13})}=\dfrac{3(4+\sqrt{13})}{3}=4+\sqrt{13}$

ここで

$3.5^2=12.25<13$

なので

$3.5^2<13<4^2$　より

$3.5<\sqrt{13}<4$

$7.5<4+\sqrt{13}<8$

であるから、もっとも近い整数は $\underline{8}$ … $\boxed{(イ)}$

(3) 2 次不等式 $x^2+\alpha x+\beta<0$ の解が $p<x<q$ であるから

$x^2+\alpha x+\beta=(x-p)(x-q)=x^2-(p+q)x+pq$

より、係数を比較して

$$\begin{cases}\alpha=-(p+q)\\ \beta=pq\end{cases}$$

よって2次不等式 $x^2+\alpha\beta x+\beta^3<0$ は

$$x^2-(p+q)pqx+(pq)^3<0$$

$$(x-p^2q)(x-pq^2)<0 \quad \cdots ①$$

ここで $\beta<0$ であり $\beta=pq$、$p<q$ から $p<0$、$0<q$ なので

$0<p^2q$、$pq^2<0$

よって①の解は

$\underline{pq^2<x<p^2q}$ $\cdots$ $\boxed{\text{(ウ)}}$

(4) A、B、C、Dを頂点とする平行四辺形はABCD、ABDC、ACBDが考えられる。

・平行四辺形ABCDとなる場合

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ より

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\\2-z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=4\\z=0\end{cases}$$

となり $z=0$ なので不適。

・平行四辺形ABDCとなる場合

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ より

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\y-3\\z-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=2\\z=4\end{cases}$$

となり $x=0$ なので不適。

・平行四辺形ACBDとなる場合

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ より

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-x\\-1-y\\-z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=-4\\z=-4\end{cases}$$

であるから、$D(4,\,-4,\,-4)$ なので $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}5\\-7\\-6\end{pmatrix}$ より

$\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{5^2+(-7)^2+(-6)^2}=\underline{\sqrt{110}}$ $\cdots$ $\boxed{\text{(エ)}}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$、$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-2\end{pmatrix}$ であるから

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=-6-12-8=-26$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2=(-2)^2+3^2+4^2=29$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=3^2+(-4)^2+(-2)^2=29$$

よって△ACD の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{29\cdot29-(-26)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{29^2-26^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{(29+26)(29-26)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{55\cdot3}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{165}\end{aligned}$$

となるので、平行四辺形 ACBD の面積は

$2S=\underline{\sqrt{165}}$ $\cdots$ $\boxed{（オ）}$

2.

$a_1=\dfrac{1}{9}$、$a_n-a_{n+1}=(6n+9)a_na_{n+1}$

(1) すべての自然数nにおいて $a_n>0$ であることを数学的帰納法で示す。

（ⅰ）$a_1=\dfrac{1}{9}>0$ であるから、$n=1$ において $a_n>0$ は成り立っている。

（ⅱ）$n=k$ において $a_n>0$ 、すなわち $a_k>0$ であると仮定する。

このとき

$$a_k-a_{k+1}=(6k+9)a_ka_{k+1}$$

が成り立ちこれを整理すると

$$\{1+(6k+9)a_k\}a_{k+1}=a_k$$

$\{1+(6k+9)a_k\}>0$ であるから

$$a_{k+1}=\frac{a_k}{1+(6k+9)a_k}>0$$

よって $n=k+1$ においても $a_n>0$ は成り立っている。

以上より数学的帰納法から、すべての自然数nにおいて $a_n>0$ である。(終)

(2) (1)より $a_n>0$、$a_{n+1}>0$ であるから $a_na_{n+1}>0$ なので

$$a_n-a_{n+1}=(6n+9)a_na_{n+1}$$

を両辺 a_na_{n+1} で割ると

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=6n+9$$

であり、$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ なので

$$b_{n+1}-b_n=6n+9$$

ここで

$$b_1=\frac{1}{a_1}=9$$

であるから $2\leqq n$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(6k+9)=9+6\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}+9(n-1)=3n(n+2)$$

これは $b_1=9$ も満たしている。

よって

$$b_n=\underline{3n(n+2)}$$

(3) (2)より $\dfrac{1}{a_n}=3n(n+2)$ であるから、逆数より

$$a_n=\frac{1}{3n(n+2)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{9} a_k &= \sum_{k=1}^{9} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\Lambda+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{72}{55} \\
&= \underline{\frac{12}{55}}
\end{aligned}
$$

3.

(1) $\sqrt{ab+3a+3b+9}=\sqrt{(a+3)(b+3)}$

より、これが整数になるには$(a+3)(b+3)$が平方数となればよく

$\begin{cases} 4 \leqq a+3 \leqq 9 \\ 4 \leqq b+3 \leqq 9 \end{cases}$ であるから、

・$a+3=4$ のとき $b+3=4,9$

・$a+3=5$ のとき $b+3=5$

・$a+3=6$ のとき $b+3=6$

・$a+3=7$ のとき $b+3=7$

・$a+3=8$ のとき $b+3=8$

・$a+3=9$ のとき $b+3=4,9$

であればそれぞれよい。

よって整数となる(a,b)の組み合わせは8通りあるので、求める確率は

$\dfrac{8}{36}=\underline{\dfrac{2}{9}}$ … $\boxed{(ア)}$

(2) $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{3}$ を満たすとき、加法定理から

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\frac{2}{3}$$

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

この両辺を2乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{8}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{9}$$

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{18}$$

よって

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{18}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\\&=\underline{\frac{19\sqrt{2}}{27}}\quad\cdots\quad\boxed{(イ)}\end{aligned}$$

(3) $ke^x = x + 2$

$k = \dfrac{x+2}{e^x}$ … ①

ここで $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ とすると

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot e^x - (x+2)e^x}{(e^x)^2} = -\dfrac{x+1}{e^x}$

であるから、$f(x)$ の増減表は右図。

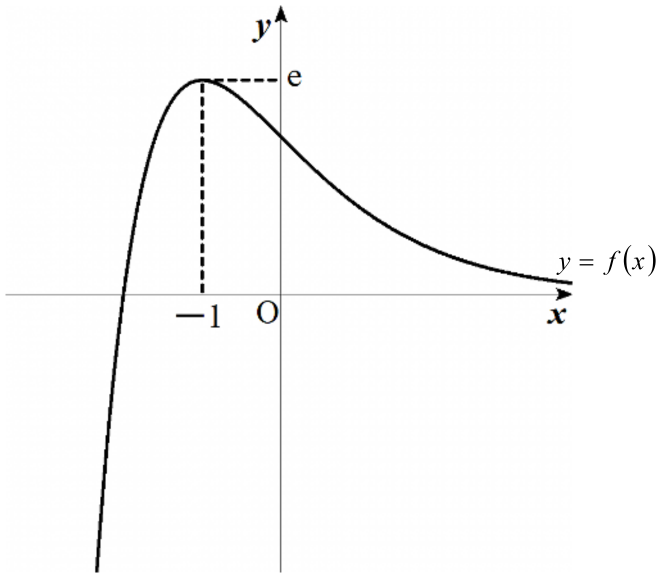
x		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	e	↘

また、

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{e^x} + \dfrac{2}{e^x}\right) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+2}{e^x} = -\infty$

であるから、$y = f(x)$ のグラフは右図ののようになる。



①が異なる 2 個の実数解をもつとき、

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$

のグラフが異なる 2 個の共有点をもつ。

よって右のグラフから、求める k の値の範囲は

$\underline{0 < k < e}$ … $\boxed{(ウ)}$

(4) $x^2 - |x|y + y^2 = 1$ … ①

与えられたグラフからも分かる通り、y 軸に関して対称であるから $0 \leqq x$ の部分で考える。

このとき①は

$x^2 - xy + y^2 = 1$

$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ … ①′

このグラフ上の点の y 座標のとりうる値の範囲は、①′を x の二次方程式と見たときに実数解をもつ y の値の範囲と一致するので、①′の判別式を D として

$D \geqq 0$

$(-y)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - 1) \geqq 0$

$y^2 - \dfrac{4}{3} \leqq 0$

$\left(y + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(y - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) \leqq 0$

$\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \leqq y \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

よって y 座標の最大値は $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ … $\boxed{\text{(エ)}}$

①′は x と y の対称式であるから、x のとりうる値の範囲も全く同様で

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ただし、$0 \leqq x$ でもあるのでこの共通部分から

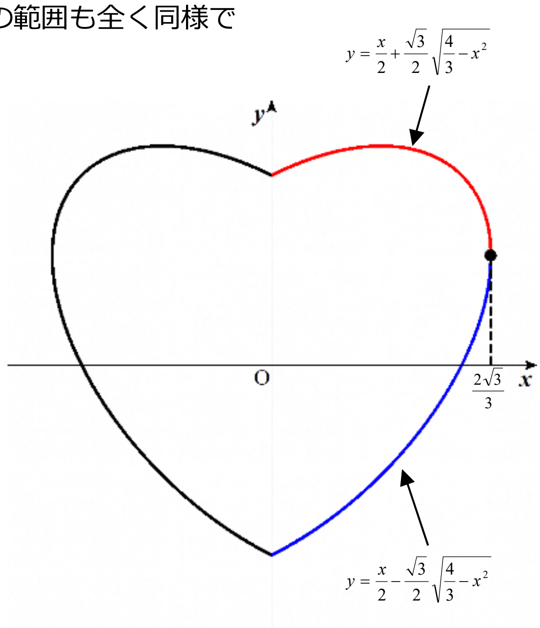
$$0 \leqq x \leqq \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ここで①′を変形すると

$$\left(y-\frac{x}{2}\right)^2 = 1-\frac{3}{4}x^2$$

$$y-\frac{x}{2} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}$$

$$y = \frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}$$



となるので、①で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S = 2\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \left\{\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\right)-\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{4}{3}-x^2}\right)\right\}dx$$

$$= 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - x^2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \quad \cdots \quad \boxed{\text{(オ)}}$$

※ $\displaystyle\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - x^2}\,dx$ は半径 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ の円の面積の 4 当分

4．

(1) $\dfrac{\alpha}{x+\alpha}=\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{x+\cos\theta+i\sin\theta}=\dfrac{(\cos\theta+i\sin\theta)\{(x+\cos\theta)-i\sin\theta\}}{\{(x+\cos\theta)+i\sin\theta\}\{(x+\cos\theta)-i\sin\theta\}}$

$$=\frac{\cos\theta(x+\cos\theta)+\sin^2\theta+i\{\sin\theta(x+\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta\}}{(x+\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{x\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+ix\sin\theta}{x^2+2x\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$

$$=\frac{x\cos\theta+1+ix\sin\theta}{x^2+2x\cos\theta+1}$$

よって

$$f(x)=\frac{x\cos\theta+1}{x^2+2x\cos\theta+1}$$

(2) (1)より

$$f'(x)=\frac{\cos\theta(x^2+2x\cos\theta+1)-(x\cos\theta+1)(2x+2\cos\theta)}{(x^2+2x\cos\theta+1)^2}$$

$$=\frac{x^2\cos\theta+2x\cos^2\theta+\cos\theta-(2x^2\cos\theta+2x\cos^2\theta+2x+2\cos\theta)}{(x^2+2x\cos\theta+1)^2}$$

$$=-\frac{x^2\cos\theta+2x+\cos\theta}{(x^2+2x\cos\theta+1)^2}$$

ここで　$x^2\cos\theta+2x+\cos\theta=0$　を解くと

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}=\frac{-1\pm\sin\theta}{\cos\theta}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　より　$0<\sin\theta,0<\cos\theta$　なので

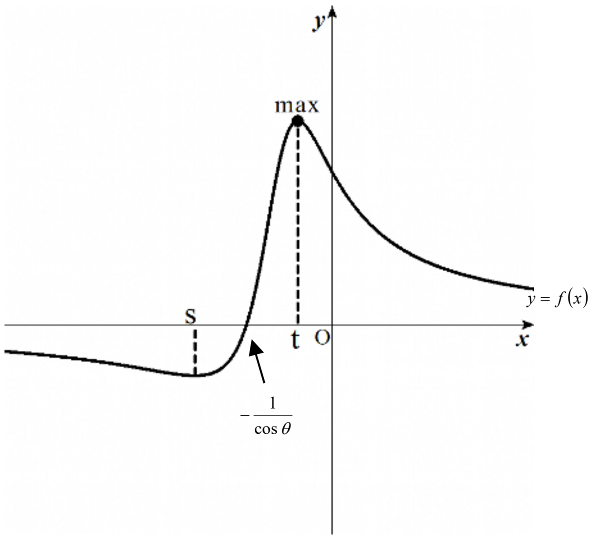
$\dfrac{-1-\sin\theta}{\cos\theta}<\dfrac{-1+\sin\theta}{\cos\theta}$　より　$s=\dfrac{-1-\sin\theta}{\cos\theta}$、

$t=\dfrac{-1+\sin\theta}{\cos\theta}$　とすると $f(x)$ の増減表は右上のようになる。

x		s		t	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(s)$	↗	$f(t)$	↘

また　$f\left(-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)=0$　であり、$s<-\dfrac{1}{\cos\theta}<t$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$　であるから、$y=f(x)$ の概形は右図のようになるので、$f(x)$ の最大値は $f(t)$ である。



よって

$f(t)=\dfrac{4}{3}$　となるとき

$$\frac{t\cos\theta+1}{t^2+2t\cos\theta+1}=\frac{4}{3}$$

$$3t\cos\theta+3=4t^2+8t\cos\theta+4$$

$$4t^2+5t\cos\theta+1=0$$

ここで $t=\dfrac{-1+\sin\theta}{\cos\theta}$ であったから

$$4\left(\frac{-1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+5\cdot\frac{-1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta+1=0$$

$$4\cdot\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}+5(-1+\sin\theta)+1=0$$

$$4\cdot\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}+5\sin\theta-4=0$$

$$4\cdot\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}+5\sin\theta-4=0$$

$$4(1-\sin\theta)+(5\sin\theta-4)(1+\sin\theta)=0$$

$$5\sin^2\theta-3\sin\theta=0$$

$$\sin\theta(5\sin\theta-3)=0$$

$0<\sin\theta<1$ より $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

このとき $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$ であるから

$$\underline{\alpha=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i}$$

総 評

1.

(1)は合同式が使えると早い問題。とっかかりがわからず初っ端から足止めされた受験生もいるように思う。実験と周期性が大事である。

(2)整数部分を求めることはよくあるが、今回はもっとも近い整数を求めよという問題。とはいえ、整数部分が $n \leqq A < n+1$ のように区間幅1で挟んで調べたのに対して、区間幅0.5で挟むだけなのでこれは得点したい。

(3) 2 次不等式の解から式を決定する問題。 p と q の符号の確認をきちんとしたかが重要。

(4) 平行四辺形になる条件と面積公式の基本問題。これは落とせない。

2.

誘導に沿って処理していけば特に難しいところはないように思う。

3.

(1),(2),(3)は得点したい。すべて基本レベルの内容である。

(4)は親切にグラフも用意されているが、逆にそれで解く前から辟易した受験生もいるかもしれない。xの絶対値を外した式(そのままでも、$-$をつけても)が楕円の式というのは受験生ならすぐ気付いて欲しい。(実際このハートは 2 つの斜めに傾けた楕円を切って繋げたものである。)問題自体の解法は前半は逆像法、後半は上のグラフから下のグラフの式を引いた定積分というシンプルな計算であるが、この問題は解けなかったり間違えた受験生の方が多いと思う。

4.

最初に複素数が出てはいるが、ほとんど三角関数の増減がメインテーマの問題である。

(1)から面倒そうな計算であるが、きちんと丁寧にやれば問題なく正解できる。

(2)はやや計算が面倒なところが多いのと、 $\cos\theta$ を含んだ状態で解の公式を使う計算を嫌わずに丁寧に処理ができるかがポイントである。