― 東京理科大学 ―

2 月 9 日（火）B 方式 工学部　数学

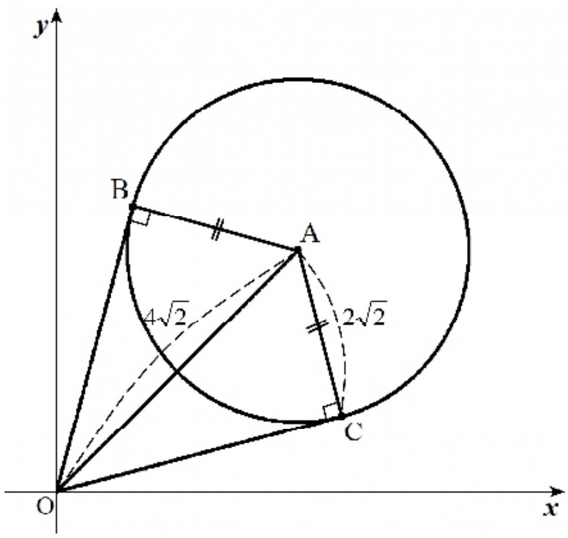
解 答・解 説

1

(1)

(a) $|z-\alpha|=2\sqrt{2}$ より、z が表す点は
α が表す点を中心とした半径 $2\sqrt{2}$
の円周上の点である。
$\mathrm{A}(\alpha)$、$\mathrm{B}(\beta)$、$\mathrm{C}(\gamma)$ とすると、
B、C 右図の位置になる。
このとき OB と OC は円の共通接線
であり、
$\mathrm{OA}=4\sqrt{2}$、$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2\sqrt{2}$
なので

$$\angle \mathrm{AOB}=\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{6}$$



よって

$$\beta=\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=(4+4i)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\underline{\left(3-\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)}\ \cdots\ [\text{ア〜エ}]$$

$$\gamma=\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=(4+4i)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\underline{\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(3-\sqrt{3}\right)}\ \cdots\ [\text{オ〜ク}]$$

$$\arg\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\underline{\frac{5}{12}}\pi\ \cdots\ [\text{ケ〜サ}]$$

$$\arg\gamma=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\underline{\frac{1}{12}}\pi\ \cdots\ [\text{シ〜セ}]$$

(b) $\gamma=|\gamma|\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

であるから、ド・モアブルの定理より

$$\gamma^n=|\gamma|^n\left(\cos\frac{n\pi}{12}+i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$$

なので、これが純虚数となるのは $\cos\frac{n\pi}{12}=0$ となるときなので k を自然数として

$$\frac{n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi$$

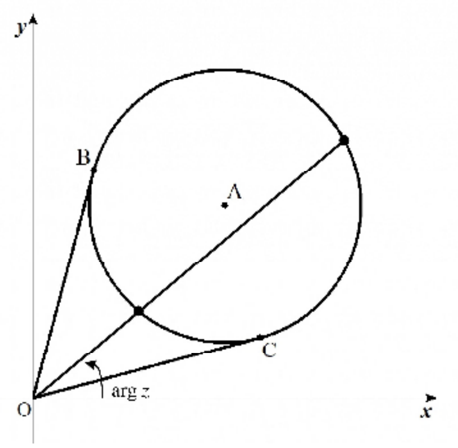
$n=6+12(k-1)=-6+12k$
のときである。

$-6+12k \leqq 2021$
を解くと

$k \leqq \dfrac{2027}{12}=168.9\Lambda$

であるから、n の個数は $\underline{168}$ 個 … [ソ～チ]

(c) (a)より



$\dfrac{\pi}{12} \leqq \arg z \leqq \dfrac{5}{12}\pi$

であり、

$\arg z=\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5}{12}\pi$ である z は1個ずつ。(β と γ)

$\dfrac{\pi}{12}<\arg z<\dfrac{5}{12}\pi$ である z は各値 2 個ずつ。

$\arg z=\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5}{12}\pi$ のときは純虚数にならないので

$\dfrac{\pi}{12}<\arg z<\dfrac{5}{12}\pi$ の範囲で純虚数になるものを求める。

$\dfrac{2021}{12}\pi<\arg z^{2021}<\dfrac{10105}{12}\pi$

であり，z^{2021} が純虚数となるのは(b)同様に考えて、自然数 k を用いて

$\arg z^{2021}=\dfrac{\pi}{2}+(k-1)\pi=k\pi-\dfrac{\pi}{2}$

と表されるときで

$\dfrac{2021}{12}\pi<k\pi-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{10105}{12}\pi$

$\dfrac{2021}{12}<k-\dfrac{1}{2}<\dfrac{10105}{12}$

$\dfrac{2027}{12}<k<\dfrac{10111}{12}$

この範囲における自然数 k の個数は

$\left[\dfrac{10111}{12}\right]-\left[\dfrac{2027}{12}\right]=842-168=674$ 個

であり、この各 k の値における $\arg z$ となる z が 2 個ずつ存在するので、求める z の個数は

$2\times 674=\underline{1348}$ 個 … [ツ～ナ]

(2)

(a) 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{7^2+9^2-14^2}{2\cdot7\cdot9}=\underline{-\frac{11}{21}}\quad\cdots\ [ア〜エ]$$

$$k=\frac{7+14+9}{2}=15$$

とすると、ヘロンの公式から

$$\triangle\mathrm{ABC}=\sqrt{k(k-7)(k-14)(k-9)}$$
$$=\sqrt{15\cdot8\cdot1\cdot6}$$
$$=\underline{12\sqrt{5}}\quad\cdots\ [オ〜キ]$$

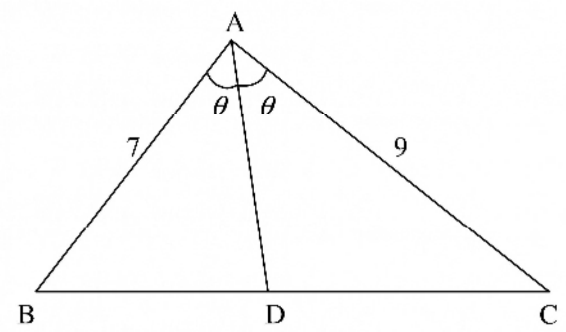
(b) $\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ とおくと、半角の公式より

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos\angle\mathrm{BAC}}{2}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(-\frac{11}{21}\right)\right\}=\frac{16}{21}$$

$0<\sin\theta$ より

$$\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{21}}$$

であるから、面積において



$$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$$
$$\frac{1}{2}\cdot7\cdot\mathrm{AD}\cdot\frac{4}{\sqrt{21}}+\frac{1}{2}\cdot9\cdot\mathrm{AD}\cdot\frac{4}{\sqrt{21}}=12\sqrt{5}$$
$$\mathrm{AD}=\underline{\frac{3}{8}\sqrt{105}}\quad\cdots\ [ク〜シ]$$

(c) $\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を r とすると、面積について

$$\frac{r}{2}(7+14+9)=12\sqrt{5}$$
$$r=\underline{\frac{4}{5}\sqrt{5}}\quad\cdots\ [ス〜ソ]$$

3 辺は円の接線であるから

$$x=\mathrm{AP}=\mathrm{AR}$$

とすると

$\mathrm{BP}=7-x$、$\mathrm{CR}=9-x$

であり、

$\mathrm{BQ}=\mathrm{BP}$、$\mathrm{CQ}=\mathrm{CR}$

なので

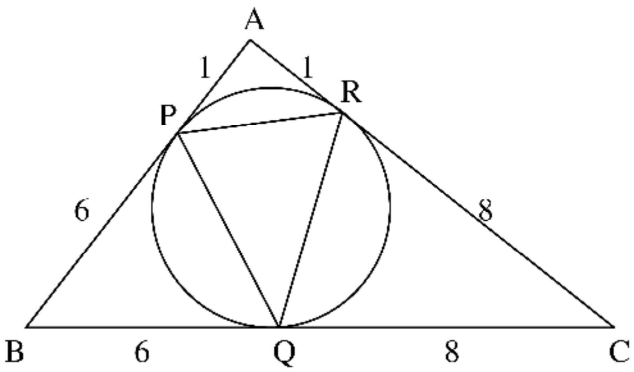
$\mathrm{BC}=\mathrm{BQ}+\mathrm{CQ}=\mathrm{BP}+\mathrm{CR}$　より

$$14=(7-x)+(9-x)$$

$$x=1$$

であるから

$$\begin{cases} \mathrm{AP} = \mathrm{AR} = 1 \\ \mathrm{BP} = \mathrm{BQ} = 6 \\ \mathrm{CQ} = \mathrm{CR} = 8 \end{cases}$$



ここで

$S = \triangle\mathrm{ABC} = 12\sqrt{5}$

とすると

・$\triangle\mathrm{APR} = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} \cdot \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \cdot S = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot S = \dfrac{1}{7 \cdot 9} S$

・$\triangle\mathrm{BPQ} = \dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BA}} \cdot \dfrac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{BC}} \cdot S = \dfrac{6}{7} \cdot \dfrac{6}{14} \cdot S = \dfrac{18}{7^2} S$

・$\triangle\mathrm{CQR} = \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CB}} \cdot \dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CA}} \cdot S = \dfrac{8}{14} \cdot \dfrac{8}{9} \cdot S = \dfrac{32}{7 \cdot 9} S$

であるから

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{PQR} &= \triangle\mathrm{ABC} - (\triangle\mathrm{APR} + \triangle\mathrm{BPQ} + \triangle\mathrm{CQR}) \\ &= S - \left(\frac{1}{7 \cdot 9} S + \frac{18}{7^2} S + \frac{32}{7 \cdot 9} S \right) \\ &= S - \frac{131}{147} S \\ &= \frac{16}{147} S \\ &= \frac{16}{147} \cdot 12\sqrt{5} \\ &= \underline{\frac{64}{49}\sqrt{5}} \quad \cdots \ [\text{タ〜ト}] \end{aligned}$$

(3)

(a) 2 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数がちょうど 2 個となるのは

・1 回目に赤玉、2 回目に白玉が取り出される

・1 回目に白玉、2 回目に赤玉が取り出される

場合が考えられるので、そのようになる確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\frac{2}{3}}\quad\cdots\ [ア,イ]$$

4 回目の試行後、

(ⅰ)赤玉の個数がちょうど 1 個となるのは、4 回とも赤玉が取り出されるときで、その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{120}$$

(ⅱ)赤玉の個数がちょうど 2 個となるのは、1 回目から順に「W R R R」「R W R R」「R R W R」「R R R W」といずれかのときの場合であるからその確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8+8+6+4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{13}{60}$$

よって(ⅰ)、(ⅱ)より 4 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数が 2 個以下になる確率は

$$\frac{1}{120}+\frac{13}{60}=\frac{27}{120}=\underline{\frac{9}{40}}\quad\cdots\ [ウ\sim オ]$$

(b) 各回、赤玉 2 個が取り出される事象を$\boxed{\text{R R}}$、赤玉と白玉が一個ずつ取り出される事象を$\boxed{\text{R W}}$、白玉 2 個が取り出される事象を$\boxed{\text{WW}}$とする。

● 2 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数がちょうど 4 個となるのは「$\boxed{\text{R R}}$、$\boxed{\text{WW}}$が 1 回ずつ」か「2 回目とも$\boxed{\text{R W}}$」の場合が考えられるので、その確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}+\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2\cdot2}{6}\cdot\frac{3\cdot3}{15}$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{2}{5}$$

$$=\underline{\frac{8}{15}}\quad\cdots\ [カ\sim ク]$$

●2 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数がちょうど 2 個となるのは 2 回とも$\boxed{\text{R R}}$のときで、その確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{15}=\frac{1}{90}$$

●2 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数がちょうど 3 個となるのは$\boxed{\text{R R}}$と$\boxed{\text{R W}}$が 1 回ずつのときで、その確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_1}{{}_6C_2}+\frac{{}_2C_1\cdot{}_2C_1}{{}_4C_2}\cdot\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2\cdot4}{15}+\frac{2\cdot2}{6}\cdot\frac{3}{15}=\frac{2}{9}$$

●2 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数がちょうど 5 個となるのは$\boxed{\text{WW}}$と$\boxed{\text{R W}}$が 1 回ずつのときで、

その確率は袋の中の赤玉が 3 個となる確率と同様の計算より $\dfrac{2}{9}$

●2 回目の試行後、袋の中の赤玉の個数がちょうど 6 個となるのは 2 回とも $\boxed{\text{WW}}$ のときで、その確率は袋の中の赤玉が 2 個となる確率と同様の計算より $\dfrac{1}{90}$

3 回目の試行後、袋に入っている赤玉が 4 個以上、6 個以下となるのは

・ 2 回目で赤玉が 2 個の場合、3 回目に $\boxed{\text{WW}}$

・ 2 回目で赤玉が 3 個の場合、3 回目に $\boxed{\text{RW}}$、$\boxed{\text{WW}}$ のいずれか

・ 2 回目で赤玉が 4 個の場合、3 回目に $\boxed{\text{RR}}$、$\boxed{\text{RW}}$、$\boxed{\text{WW}}$ のいずれか(確率 1)

・ 2 回目で赤玉が 5 個の場合、3 回目に $\boxed{\text{RR}}$、$\boxed{\text{RW}}$ のいずれか

・ 2 回目で赤玉が 6 個の場合、3 回目に $\boxed{\text{RR}}$

であればそれぞれ良いので、その確率は

$$\frac{1}{90}\cdot\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}+\frac{2}{9}\cdot\frac{{}_3C_1\cdot{}_5C_1+{}_5C_2}{{}_8C_2}+\frac{8}{15}\cdot 1+\frac{2}{9}\cdot\frac{{}_5C_2+{}_3C_1\cdot{}_5C_1}{{}_8C_2}+\frac{1}{90}\cdot\frac{{}_6C_2}{{}_8C_2}$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{90}\cdot\frac{15}{28}+\frac{2}{9}\cdot\frac{25}{28}\right)+\frac{8}{15}$$

$$=\frac{103}{18\cdot 14}+\frac{8}{15}$$

$$=\frac{103}{2^2\cdot 3^2\cdot 7}+\frac{8}{3\cdot 5}$$

$$=\frac{515+672}{2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}$$

$$=\underline{\frac{1187}{1260}}\ \cdots\ [ケ\sim タ]$$

2

(1) $\begin{cases}(4n-1)x-(2n-1)y>2n(3n-1)\\ x\leqq 3n-1\\ y\geqq -n\end{cases}$ を満たす領域を D とする。

$(4n-1)x-(2n-1)y=2n(3n-1)$ $\cdots$ ①

①に $x=3n-1$ を代入すると

$(4n-1)(3n-1)-(2n-1)y=2n(3n-1)$

$(2n-1)y=(2n-1)(3n-1)$

$y=3n-1$

①に $y=-n$ を代入すると

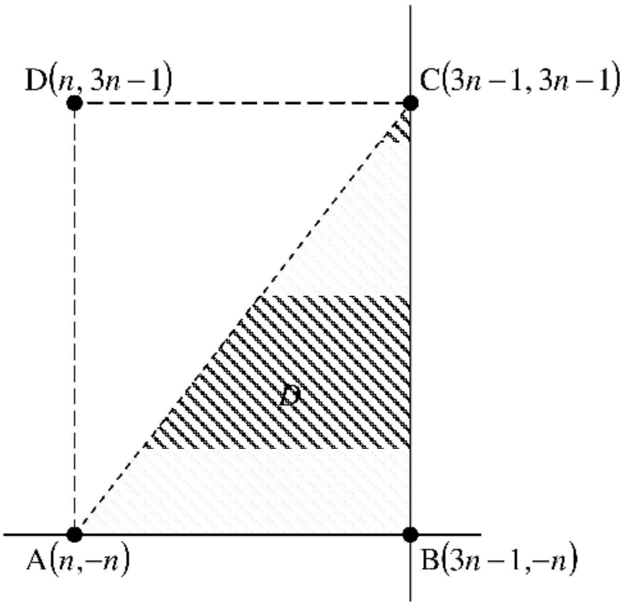
$(4n-1)x+(2n-1)n=2n(3n-1)$

$(4n-1)x=4n^2-n$

$x=n$

であるから、

$\mathrm{A}(n,-n)$, $\mathrm{B}(3n-1,-n)$, $\mathrm{C}(3n-1,3n-1)$, $\mathrm{D}(n,3n-1)$ として、D は右図の斜線部の、境界は AC は含まず、AB と BC は含む部分である。



ここで、直線 AC の傾きは

$\dfrac{4n-1}{2n-1}=2+\dfrac{1}{2n-1}$

であり、$|\mathrm{AB}|=2n-1$ なので、線分 AC 上において、A と C 以外の格子点は存在しない。

よって、領域 D 内の格子点の個数は四角形 ABCD の境界及び内部に含まれる格子点から A と B の 2 個を除いた個数の半分である。

AB 上には $2n$ 個、BC 上には $4n$ 個の格子点が存在するので

$I_n=\dfrac{1}{2}(2n\cdot 4n-2)=4n^2-1$

よって

(a) $I_1=4\cdot 1^2-1=\underline{3}$ $\cdots$ (あ)

$I_2=4\cdot 2^2-1=\underline{15}$ $\cdots$ (い)

(b) $I_n=\underline{4n^2-1}$ $\cdots$ (う)

(2)

(a) $\begin{cases} |(4n-1)x-(2n-1)y| \leqq 2n(3n-1) \\ |(2n-1)x-(4n-1)y| \leqq 2n(3n-1) \end{cases}$

$\begin{cases} -2n(3n-1) \leqq (4n-1)x-(2n-1)y \leqq 2n(3n-1) \\ -2n(3n-1) \leqq (2n-1)x-(4n-1)y \leqq 2n(3n-1) \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{(4n-1)x-2n(3n-1)}{2n-1} \leqq y \leqq \dfrac{(4n-1)x+2n(3n-1)}{2n-1} \\ \dfrac{(2n-1)x-2n(3n-1)}{4n-1} \leqq y \leqq \dfrac{(2n-1)x+2n(3n-1)}{4n-1} \end{cases}$

ここで

$\begin{cases} y = \dfrac{(4n-1)x+2n(3n-1)}{2n-1} \\ y = \dfrac{(2n-1)x+2n(3n-1)}{4n-1} \end{cases}$ の交点を求めると $(x, y) = (-n, n)$

$\begin{cases} y = \dfrac{(4n-1)x+2n(3n-1)}{2n-1} \\ y = \dfrac{(2n-1)x-2n(3n-1)}{4n-1} \end{cases}$ の交点を求めると $(x, y) = (-3n+1, -3n+1)$

$\begin{cases} y = \dfrac{(4n-1)x-2n(3n-1)}{2n-1} \\ y = \dfrac{(2n-1)x+2n(3n-1)}{4n-1} \end{cases}$ の交点を求めると $(x, y) = (3n-1, 3n-1)$

$\begin{cases} y = \dfrac{(4n-1)x-2n(3n-1)}{2n-1} \\ y = \dfrac{(2n-1)x-2n(3n-1)}{4n-1} \end{cases}$ の交点を求めると $(x, y) = (n, -n)$

なので $a_n = \underline{3n-1}$、$b_n = \underline{n}$ ⋯ $\boxed{\text{(え)}}$、$\boxed{\text{(お)}}$

(b) 領域 D_n はひし形で 2 本の対角線の長さは

・$\sqrt{2}\{(3n-1)-(-3n+1)\} = 2\sqrt{2}(3n-1)$

・$\sqrt{2}\{n-(-n)\} = 2\sqrt{2}n$

であるから、D_n の面積は

$\dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2}(3n-1) \cdot 2\sqrt{2}n = \underline{4(3n-1)n}$ ⋯ $\boxed{\text{(か)}}$

(c) $\mathrm{A}(-3n+1,\ -3n+1)$、$\mathrm{B}(n, -n)$

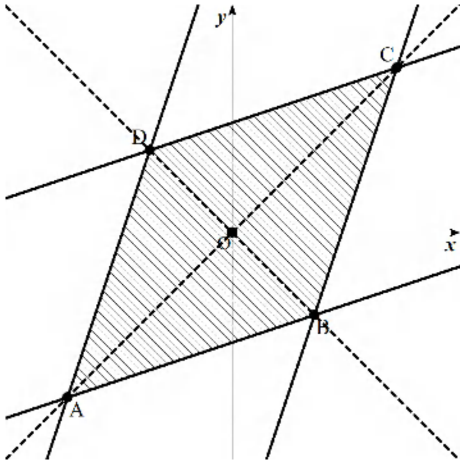
$\mathrm{C}(3n-1, 3n-1)$、$\mathrm{D}(-n, n)$ とする。

$\begin{cases} \mathrm{AC} : y = x \\ \mathrm{BD} : y = -x \end{cases}$ であるから

AC 上には $6n-1$ 個、BD 上には $2n+1$ 個

の格子点が存在する。

また、



AD の傾きは$\dfrac{4n-1}{2n-1}$で $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}2n-1\\4n-1\end{pmatrix}$ なので

AD 上には A と D しか格子点は含まれない。

AB 、 BC 、 CD 上でも同様のことがいえる。

△ABO 、 △BCO 、 △CDO 、 △DAO の境界を含む領域内の格子点はそれぞれ

$\dfrac{1}{2}\cdot\{3n(n+1)-2\}+2=\dfrac{3}{2}n(n+1)+1$ 個

よって、これらの重複する格子点に注意して

$$J_n=4\left\langle\frac{3}{2}n(n+1)+1-\{3n+(n+1)-1\}\right\rangle+(6n-1)+(2n+1)-1$$

$$=\underline{6n^2-2n+3}\text{ 個} \cdots \boxed{\text{(き)}}$$

$\boxed{3}$

(1) $\begin{cases} x=(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=(1+\sin\theta)\sin\theta \end{cases}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cdot\cos\theta+(1+\cos\theta)\cdot(-\sin\theta)=-\sin\theta(2\cos\theta+1) \\ \dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta\cdot\sin\theta+(1+\sin\theta)\cdot\cos\theta=\cos\theta(2\sin\theta+1) \end{cases}$$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となるのは $\cos\theta=0$ または $\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ となるときであるから，θ の値が小さい順に

$\theta=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$、$\underline{\dfrac{7}{6}\pi}$、$\underline{\dfrac{3}{2}\pi}$、$\underline{\dfrac{11}{6}\pi}$ … $\boxed{(あ)}$ ～ $\boxed{(え)}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}}=-\frac{\cos\theta(2\sin\theta+1)}{\sin\theta(2\cos\theta+1)}$$

であるから、C 上の接線の傾きが -1 となるとき

$-\dfrac{\cos\theta(2\sin\theta+1)}{\sin\theta(2\cos\theta+1)}=-1$ よりこれを整理して

$\tan\theta=1$

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ においてこれを満たすのは $\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

・$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$\begin{cases} x=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases}$ なので、このときの接線は

$$y=-\left(x-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}+1}{2}=-x+\sqrt{2}+1$$

・$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$ のとき

$$\begin{cases} x=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \\ y=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \end{cases}$$

なので、このときの接線は

$$y=-\left(x+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}-1}{2}=-x-\sqrt{2}+1$$

よって傾きが -1 である接線の方程式は

$y=\underline{-x+\sqrt{2}+1}$ と $y=\underline{-x-\sqrt{2}+1}$ ⋯ (お)、(か)

(2) PHの長さは $\mathrm{P}(X,Y)$ と直線: $x-y=0$ の距離であるから

$$\mathrm{PH}=\frac{|X-Y|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|X-Y|$$

であるから

$$S=\pi\cdot\mathrm{PH}^2=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}|X-Y|\right)^2=\underline{\frac{\pi}{2}(X-Y)^2}\ \cdots ①$$

(1)より $\mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2},-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$ であり、これは直線 $y=x$ 上の点である。

また、

$$\mathrm{QP}^2=\left\{X-\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right\}^2+\left\{Y-\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\right\}^2$$
$$=X^2+Y^2+\left(\sqrt{2}-1\right)(X+Y)+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

より、△QPH における三平方の定理より

$$h^2=\mathrm{QH}^2=\mathrm{QP}^2-\mathrm{PH}^2$$
$$=X^2+Y^2+\left(\sqrt{2}-1\right)(X+Y)+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}-\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}|X-Y|\right\}^2$$
$$=X^2+Y^2+\left(\sqrt{2}-1\right)(X+Y)+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\left(X^2-2YX+Y^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(X^2+2YX+Y^2\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)(X+Y)+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(X+Y)^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)(X+Y)+\left(3-2\sqrt{2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(X+Y)+\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}^2$$

よって

$$h=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(X+Y)+\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|X+Y+\sqrt{2}-1\right|\ \cdots ②$$

ここで $\mathrm{P}(X,Y)$ は曲線 C 上の点より

$$\begin{cases}X=(1+\cos\theta)\cos\theta\\ Y=(1+\sin\theta)\sin\theta\end{cases}$$ とすると

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left|X+Y+\sqrt{2}-1\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|(1+\cos\theta)\cos\theta+(1+\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}-1\right|$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\cos\theta+\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta+\sqrt{2}-1\right|$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1+\sqrt{2}-1\right|$$

$$=\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right|$$

$-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ であるから，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\geqq 0$ より

$X+Y+\sqrt{2}-1\geqq 0$ なので②から

$$h=\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(X+Y)+\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}^2}=\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X+Y+\sqrt{2}-1\right)}$$

(3) $\begin{cases}X=(1+\cos\theta)\cos\theta\\ Y=(1+\sin\theta)\sin\theta\end{cases}$ とすると①より

$$S=\frac{\pi}{2}(X-Y)^2=\frac{\pi}{2}\{(1+\cos\theta)\cos\theta-(1+\sin\theta)\sin\theta\}^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta-\sin^2\theta\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta+\cos\theta-\sin\theta\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)+\cos\theta-\sin\theta\}^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta+1)\}^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\langle\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right\}\right\rangle^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot 2\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right\}^2$$

$$=\pi\cdot\left\{1-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\right\}^2$$

であり，また(2)より

$$h=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\ \cdots\ ③$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=h-1$$

なので

$$S=\pi\cdot\left\{1-(h-1)^2\right\}\left\{\sqrt{2}(h-1)+1\right\}^2$$

$$=\pi\cdot\left\{1-(h-1)^2\right\}\left\{2(h-1)^2+2\sqrt{2}(h-1)+1\right\}$$

$$=\pi\cdot\left\{-2(h-1)^4-2\sqrt{2}(h-1)^3+(h-1)^2+2\sqrt{2}(h-1)+1\right\}$$

ここで $-1\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ より $0\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1\leqq 2$ なので④から

$0 \leqq h \leqq 2$ であるから，

$$V=\int_0^2 Sdh=\pi\int_0^2\left\{-2(h-1)^4-2\sqrt{2}(h-1)^3+(h-1)^2+2\sqrt{2}(h-1)+1\right\}dh$$

ここで

$t=h-1$ とおくと

$dt=dh$ であり，h と t の対応は右図より

h	$0 \to 2$
t	$-1 \to 1$

$$V=\pi\int_{-1}^1\left(-2t^4-2\sqrt{2}t^3+t^2+2\sqrt{2}t+1\right)dh$$

$$=2\pi\int_0^1\left(-2t^4+t^2+1\right)dh$$

$$=2\pi\left[-\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1$$

$$=2\pi\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\underline{\frac{28}{15}\pi}$$

総 評

1

(1) 複素数平面の回転、偏角に関する問題。最初の問題にしては難易度も高く分量も多い問題であり、後半は似た問題を解いたことがなければ難しい。

(2) 三角形とその周辺の計量に関する問題。今回の試験の中では易しい問題に入る。

(3) 内容は難しくないが計算がややこしい。(b)の最後は余事象で求める方法もあるが、どちらでやってもそこまで差はなさそうである。

2

Σを使わない格子点の個数の問題。考え方が分かれば、解法は難しくないが重複の処理などが紛らわしく計算ミスに注意。また(b)の最後も(a)の考え方がヒントなのであろうがイメージが難しい。

3

(2)まではさほど難しい内容ではないが、(3)の計算が、問題文の中にヒントとして置換積分を用いてθの積分として計算とあるが、そのまま$\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} Sdh$を計算すると尋常ではない計算となり、明らかにそのような計算をさせる意図での出題ではないと思われる。(とても時間はかかるもののできないことはないが。)
そこで解答のように、置換積分は用いたがhについての積分で計算すれば割と綺麗な計算になる。
ただし、問題文には「…Sをhについて積分すれば求められるが、置換積分法によってSをθによって積分しても計算できる。これにより…」とあり、この誘導には逆らっており、$\boxed{\text{(け)}}$ は記述である為、この計算による答案が完全正解と言えるのか不明である。