― 法政大学 ―

2月14日（日）Ⅱ日程　数学

解 答・解 説

〔Ⅰ〕

$S_n = n\times 3^n$

$a_1 = S_1 = 1\times 3^1 = \underline{3}$ … $\boxed{ア}$

$2\leqq n$ において

$a_n = S_n - S_{n-1} = n\times 3^n - (n-1)\times 3^{n-1} = 3n\times 3^{n-1} - (n-1)\times 3^{n-1} = (2n+1)\times 3^{n-1}$

これは $a_1 = 3$ も満たす。

よって

$a_n = \underline{(2n+1)\times 3^{n-1}}$ … $\boxed{イ}$

であり、$\boxed{ウ}$＝②

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n = n\times(n+2)$$

なので、$\boxed{エ}$＝④

$a_{2k} = (4k+1)\times 3^{2k-1} = (4k+1)\times 3\cdot 3^{2k-2} = 3(4k+1)\times 9^{k-1}$ … $\boxed{オ}$、$\boxed{カ}$

$T_m = \sum_{k=1}^{m} 9^{k-1} = \frac{9^m-1}{9-1} = \underline{\frac{1}{8}(9^m-1)}$ … $\boxed{キ}$、$\boxed{ク}$

なので、$\boxed{ケ}$＝③

$$U_m = 1+2\times 9+3\times 9^2+4\times 9^3+\cdots+m\times 9^{m-1} \quad \cdots(\mathrm{I})$$

$$9U_m = 9+2\times 9^2+3\times 9^3+\cdots+(m-1)\times 9^{m-1}+m\times 9^m \quad \cdots(\mathrm{II})$$

(Ⅰ)−(Ⅱ)より

$U_m - 9\times U_m = 1+9+9^2+9^{m-1} - m\times 9^m = T_m - m\times 9^m$

であるから、$\boxed{コ}$＝⑤

よって

$$U_m = \sum_{k=1}^{m}(k\times 9^{k-1}) = \frac{1}{8}(m\times 9^m - T_m)$$

であり、

$$\sum_{k=1}^{m} a_{2k} = \sum_{k=1}^{m} \left\{3(4k+1)\times 9^{k-1}\right\} = 12\sum_{k=1}^{m} k\times 9^{k-1} + 3\sum_{k=1}^{m} 9^{k-1}$$

$$= 12U_m + 3T_m$$

$$= 12\cdot\frac{1}{8}\left(m\times 9^m - T_m\right) + 3T_m$$

$$= \frac{3}{2}m\times 9^m + \frac{3}{2}T_m$$

$$= \frac{3}{2}m\times 9^m + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(9^m - 1\right)$$

$$= \underline{\frac{3}{2}\left(m+\frac{1}{8}\right)\times 9^m - \frac{3}{16}} \quad \cdots \boxed{サ}\sim\boxed{チ}$$

であるから、$\boxed{セ}$＝③

〔Ⅱ〕

(1) 同じ数字を2度使わないときに作られる整数の個数は

$_6P_2=6\cdot5=\underline{30}$ 個 … $\boxed{\text{アイ}}$

同じ数字を2度使ってよいときに作られる整数の個数は

$6^2=\underline{36}$ 個 … $\boxed{\text{ウエ}}$

(2)・同じ数字を使わないときの整数の作り方は

$_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$ 通り

・同じ数字を2度使ったときの整数の作り方は

$_6C_2\times6=\dfrac{6\cdot5}{2}\cdot6=90$ 通り

（同じ数字を2度使う場合、全体では2種類の数字を使い、その2数を○と□とすると
「○○□」「○□○」「□○○」「□□○」「□○□」「○□□」の6パターンが考えられる。）

よって、同じ数字を2度まで使ってよいときに作られる3桁の整数の個数は

$120+90=\underline{210}$ 個 … $\boxed{\text{オカキ}}$

(3) 同じ数字を2度まで使ってよいときに作られる4桁の整数のうち

(Ⅰ)千の位と百の位が1のものは

・十の位と一の位の値が異なるものは $_5P_2$ 個

・十の位と一の位の値が異なるものは5個

であるから、これらを合わせて

$_5P_2+5=5\cdot4+5=\underline{25}$ 個 … $\boxed{\text{クケ}}$

(Ⅱ)千の位が1、百の位が2のものは

・十の位と一の位が同じ数字のものが4個

・十の位と一の位が1、2以外の異なる数字のものが $_4P_2$ 個

・十の位と一の位のうち、一方が1、もう一方が2であるものが $2!$ 個

・十の位と一の位のうち、一方が1か2、もう一方が1、2以外の異なる数字のものが
$2\cdot4\times2!$ 個

であるから、これらを合わせて

$4+{}_4P_2++2!+2\cdot4\times2!=4+12+2+16=\underline{34}$ 個 … $\boxed{\text{コサ}}$

同じ数字を2度まで使ってよいときに作られる4桁の整数のうち

・1個の数字だけ2度使い、他の2個の数字を1回ずつ使う場合

同じ数字となる2箇所の位の選び方が $_4C_2$ 通りで、その2箇所の数字の決め方が6通りあり、
残りの2箇所の位に残りの5個の数から異なる2個を選んで並べると考えて

$_4C_2\cdot6\times{}_5P_2=720$ 個

・同じ数字を 2 種類、2 度づつ使う場合

同じ数字となる 2 箇所ずつの位の決め方が $\dfrac{{}_4C_2}{2!}$ 通りあり、そこに 2 種類の数を選んで並べると考えて

$$\frac{{}_4C_2}{2!}\cdot{}_6P_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot2}\cdot6\cdot5=90\text{ 個}$$

・異なる 4 個の数字を使う場合

$$ {}_6P_4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360\text{ 個}$$

以上から、同じ数字を 2 度まで使ってよいときに作られる 4 桁の整数の個数は

$720+90+360=\underline{1170}$ 個 … $\boxed{シ}$～$\boxed{ソ}$

(4) どの数字もちょうど 2 回使ってできる 6 桁の整数は

$\dfrac{6!}{2!2!2!}=\underline{90}$ 個 … $\boxed{タチ}$

1 が隣り合っている 6 桁の整数は

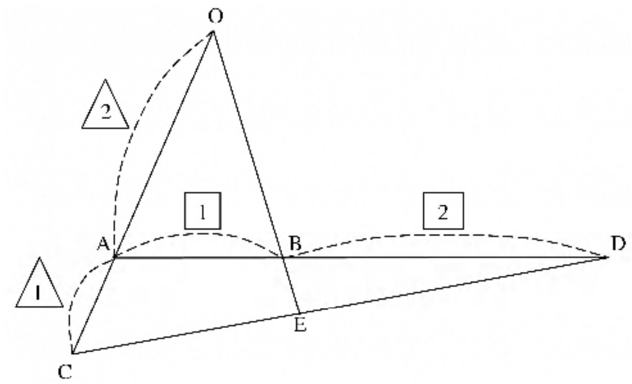
$\dfrac{5!}{2!2!}=\underline{30}$ 個 … $\boxed{ツテ}$

〔Ⅲ〕

(1) $\mathrm{OC}:\mathrm{CA}=3:1$ より

$\mathrm{OA}:\mathrm{OC}=2:3$ なので

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\underline{\dfrac{3}{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ … $\boxed{ア}$、$\boxed{イ}$



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3-2}$$

$$=\underline{-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}} \cdots \boxed{ウ}\sim\boxed{オ}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=-\frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

であるから、$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表すとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(-\frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{3-7s}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3s\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots ①$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots ②$$

とも表したとき、①と②の係数の比較から

$$\begin{cases}\dfrac{3-7s}{2}=0\\ 3s=t\end{cases}$$

これを解くと $s=\underline{\dfrac{3}{7}}$、$t=\underline{\dfrac{9}{7}}$ … $\boxed{カ}\sim\boxed{ケ}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{9}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから $\mathrm{OB}:\mathrm{BE}=7:2$ であり,これと $\mathrm{AB}:\mathrm{BD}=1:2$ から

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{OB}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{7}=\underline{\frac{4}{7}} \cdots \boxed{コ}、\boxed{サ}$$

$\mathrm{OA}=2\sqrt{3}$、$\mathrm{OB}=7$ のとき

$$\mathrm{OC}=\frac{3}{2}\cdot2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

$$\mathrm{OE}=\frac{9}{7}\cdot7=9$$

なので、△OCE における余弦定理から

$$\mathrm{CE}^2=\left(3\sqrt{3}\right)^2+9^2-2\cdot3\sqrt{3}\cdot9\cdot\cos\theta=108-54\sqrt{3}\cos\theta \cdots ③$$

また、△OCE における正弦定理から

$2\cdot3\sqrt{3}=\dfrac{\mathrm{CE}}{\sin\theta}$ より

$\mathrm{CE}=6\sqrt{3}\sin\theta$

なので、この両辺を2乗すると

$\mathrm{CE}^2=108\sin^2\theta=108(1-\cos^2\theta)$

なので、これを③へ代入して

$108(1-\cos^2\theta)=108-54\sqrt{3}\cos\theta$

$2-2\cos^2\theta=2-\sqrt{3}\cos\theta$

$2\cos^2\theta-\sqrt{3}\cos\theta=0$

$\cos\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})=0$

であるから

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2},0$

θは三角形の内角より　$\underline{\theta=\dfrac{1}{6}\pi,\ \dfrac{1}{2}\pi}$　…　$\boxed{シ}$～$\boxed{ソ}$

$\theta=\dfrac{1}{6}\pi$　のとき、△OAB における余弦定理より

$\mathrm{AB}^2=(2\sqrt{3})^2+7^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot7\cdot\cos\dfrac{1}{6}\pi=19$

よって

$\mathrm{AB}=\underline{\sqrt{19}}$　…　$\boxed{タチ}$

〔Ⅳ〕

(1) $f(x)=-x^3+4x^2-4x+\frac{8}{3}$

x		$\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

$f'(x)=\underline{-3x^2+8x-4}$ … $\boxed{ア}$～$\boxed{エ}$

$=-(3x-2)(x-2)$

より，$f'(x)=0$ となる x は小さい順に $\underline{\frac{2}{3}}$、$\underline{2}$ … $\boxed{オ}$～$\boxed{キ}$

$f(x)$の増減表は右上のようになるので、$f\left(\frac{2}{3}\right)$は極小値ではあるが、最小値ではないので

$\boxed{ク}=\underline{④}$

接線 l の方程式は

$y=f'(0)(x-0)+f(0)=\underline{-4x+\frac{8}{3}}$ … $\boxed{ケ}$～$\boxed{シ}$

x	0		$\frac{8}{3}$		β
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$		↗		↘	

$g(x)=f(x)-\left(-4x+\frac{8}{3}\right)$ とするとき

$g'(x)=f'(x)-(-4)=-3x^2+8x-4+4=-x(3x-8)$

であるから、$0<x<\beta$ の範囲で $g'(x)=0$ となる x の値は$\frac{8}{3}$なので、$\boxed{ス}=\underline{⑨}$

$g(x)$の増減表は右上のようになるので、$x=\frac{8}{3}$ のとき $g(x)$は最大値をとるので、$\boxed{セ}=\underline{①}$

(2) $h(x)=x|x-t|+(t-2)x$ より

$h(t)=(t-2)t$

なので $t<0$ のとき、$f(t)>0$

よって、$\boxed{ソ}=\underline{③}$

・$x\geqq t$ のとき

$h(x)=x(x-t)+(t-2)x=x^2-2x=(x-1)^2-1$

であるから、$p=q=1$ なので $\boxed{タ}=\underline{①}$、$\boxed{チ}=\underline{①}$

・$x<t$ のとき

$h(x)=x\{-(x-t)\}+(t-2)x=-x^2+2(t-1)x=-\{x-(t-1)\}^2+(t-1)^2$

であるから、$r=t-1$、$s=(t-1)^2$ なので $\boxed{ツ}=\underline{③}$、$\boxed{テ}=\underline{⑤}$

$h(x)=\begin{cases} x(x-2) & (t\leqq x) \\ -x\{x-2(t-1)\} & (x<t) \end{cases}$ であり、$t<0$ であることに注意すると

$h(x)=0$ となる x は小さい順に $2(t-1)$、0、2 なので、$\boxed{ト}=\underline{⑦}$、$\boxed{ナ}=\underline{⓪}$、$\boxed{ニ}=\underline{②}$

$2(t-1)<t<0$ であることに注意して

・$\displaystyle\int_t^0 |h(x)|dx=\int_t^0 |x(x-2)|dx=\int_t^0 x(x-2)dx$

$\displaystyle=\int_t^0 (x^2-2x)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_t^0$

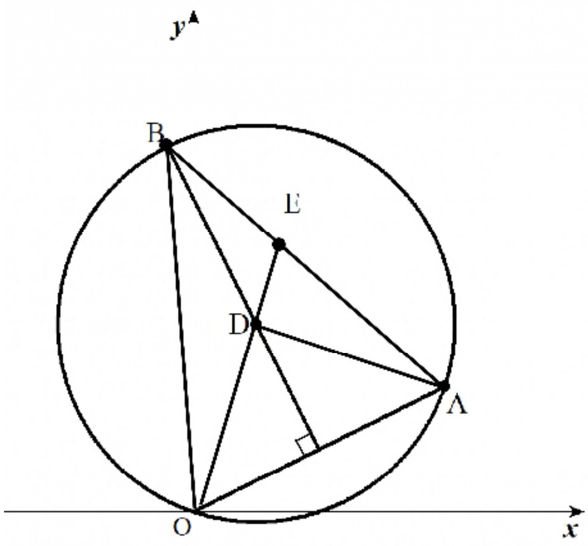
$\displaystyle=\underline{\frac{-1}{3}t^3+t^2}$ … $\boxed{ヌ}$～$\boxed{ノ}$

・$\displaystyle\int_0^2 |h(x)|dx=\int_0^2 |x(x-2)|dx=-\int_0^2 x(x-2)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 2^3=\frac{4}{3}$ … $\boxed{ハ}$、$\boxed{ヒ}$

であるから

$\displaystyle\int_t^2 |h(x)|dx=-\frac{1}{3}t^3+t^2+\frac{4}{3}$

〔Ⅴ〕



(1) $\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=\underline{2\sqrt{5}}$ … $\boxed{ア}$、$\boxed{イ}$

OA の傾きは $\dfrac{1}{2}$、中点の座標は$(2,1)$より、

OA の垂直二等分線の方程式は

$y=-2(x-2)+1=\underline{-2x+5}$ … $\boxed{ウ}$～$\boxed{オ}$

$\mathrm{OD}=\underline{\sqrt{10}}$ … $\boxed{カキ}$

であり、D から OA に下した垂線の足を H

とすると、H は OA の中点より

$\mathrm{OH}=\sqrt{5}$

よって $\angle\mathrm{DOH}=\dfrac{\pi}{4}$ なので　$\mathrm{DH}=\sqrt{5}$

D は　$y=-2x+5$　上の点より　$\mathrm{D}(s,\ -2s+5)$　とする。

OA の方程式は　$y=\dfrac{1}{2}x$　すなわち　$x-2y=0$　なので

$$\frac{|s-2(-2s+5)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

$|5s-10|=5$

$|s-2|=1$

$s-2=\pm1$

$s=1,3$

このうち D が第一象限の点となるのは$s=1$のときで $\underline{\mathrm{D}(1,3)}$ … $\boxed{ク}$,$\boxed{ケ}$

△OAD と△OAB について、OA を共通の底辺とみたとき、面積比は高さの比と一致する。

よって

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{DH}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\underline{1+\sqrt{2}} \ \cdots\ \boxed{コ}、\boxed{サ}$$

△ODH は$\angle\mathrm{OHD}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形であり、△ODH ≡△ADH　より

$$\angle\mathrm{ODA}=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

よって、$\boxed{シ}$=$\underline{④}$

弧 OA の中心角の定理より

$$\angle\mathrm{OBA}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{ODA}=\frac{\pi}{4}$$

△BOD ≡△BAD　であるから

$$\angle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{8}\pi$$

であり、$\triangle\mathrm{ODH}\equiv\triangle\mathrm{ADH}$ より $\angle\mathrm{OAD}=\dfrac{\pi}{4}$ なので

$$\angle\mathrm{EAD}=\angle\mathrm{OAB}-\angle\mathrm{OAD}=\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{\pi}{8}}\ \cdots\ \boxed{ス}$$

半角の公式より

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\underline{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\ \cdots\ \boxed{セ}\sim\boxed{タ}$$

$\angle\mathrm{ODA}=\dfrac{\pi}{2}$ より $\angle\mathrm{ADE}=\dfrac{\pi}{2}$ なので、$\triangle\mathrm{OAE}$ は直角三角形となる。

よって

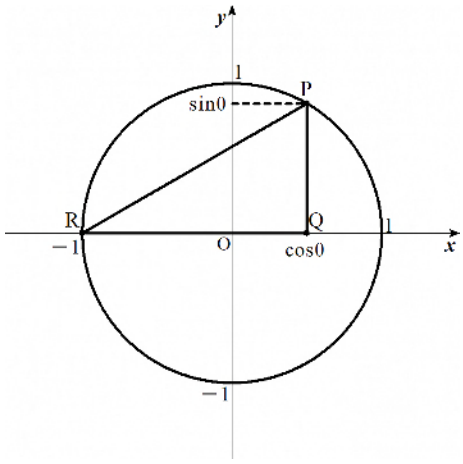
$$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}\cos\angle\mathrm{EAD}$$

$$\mathrm{AE}=\frac{\mathrm{AD}}{\cos\angle\mathrm{EAD}}=\frac{\sqrt{10}}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

なので

$$\mathrm{AE}^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{\cos\frac{\pi}{8}}\right)^2=\frac{10}{\cos^2\frac{\pi}{8}}=\frac{10}{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{40\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\underline{20\left(2-\sqrt{2}\right)}\ \cdots\boxed{チ}\sim\boxed{テ}$$

〔Ⅵ〕



$\mathrm{Q}(\cos\theta, 0)$ であり、$0<\theta<\pi$ より

$$\begin{cases} \mathrm{PQ}=\sin\theta \\ \mathrm{QR}=\cos\theta+1 \end{cases}$$

よって三角形PQRの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{QR}\cdot\mathrm{PQ}=\underline{\frac{1}{2}(\cos\theta+1)\sin\theta} \quad\cdots\ \boxed{ア}、\boxed{イ}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x+1)\sin x$$

であるとき

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x+1)\sin x}{\sin(5x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x+1}{2}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{5x}$$

$$=\frac{1+1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{1}{5}$$

なので、$\boxed{ウ}=\underline{⑥}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{(-\sin x)\sin x+(\cos x+1)\cos x\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\sin^2 x+\cos^2 x+\cos x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-\left(1-\cos^2 x\right)+\cos^2 x+\cos x\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)$$

$$=\underline{\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(\cos x+1)} \quad\cdots\ \boxed{エ}\sim\boxed{カ}$$

$$f''(x)=(-\sin x)(\cos x+1)+\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)(-\sin x)$$

$$=(-\sin x)\left\{(\cos x+1)+\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\underline{-2\left(\cos x+\frac{1}{4}\right)\sin x} \quad\cdots\ \boxed{キク}$$

よって、$\boxed{ケ}=\underline{⑦}$

$0<x<\pi$ において

$f'(x)=0$ となるのは $\cos x=\dfrac{1}{2}$、$f''(x)=0$ となるのは $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

であるから

$\cos a = \dfrac{1}{2}$、$\cos b = -\dfrac{1}{4}$

$0 < x < \pi$　において $\cos x$ の値は単調減少なので　$a < b$　より、

$\boxed{\text{コ}} = ①$

x	0		α		β		π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↗		↘		↘	

よって　$a = \alpha$、$b = \beta$　であり、

$0 < x < \pi$　における $f(x)$ の増減表は右上の図のようになるので、$y = f(x)$　のグラフは

(ⅰ) $0 < x < \alpha$　において常に増加し、上に凸なので、$\boxed{\text{サ}} = ①$

(ⅱ) $\alpha < x < \beta$　において常に減少し、上に凸なので、$\boxed{\text{シ}} = ③$

(ⅲ) $\beta < x < \pi$　において常に減少し、下に凸なので、$\boxed{\text{ス}} = ④$

増減表より、三角形PQR の面積の最大値は

$$f(\alpha) = f(a) = \frac{1}{2}(\cos a + 1)\sin a$$

ここで　$\cos a = \dfrac{1}{2}$　より　$a = \dfrac{\pi}{3}$　なので　$\sin a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　であるから、求める最大値は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad \cdots \boxed{\text{セ}}\sim\boxed{\text{タ}}$$

C を積分定数として

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx = \int \frac{1}{2}(\cos x + 1)\sin x dx &= \frac{1}{2}\int(\sin x\cos x + \sin x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin^2 x - \cos x\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x\right\} + C \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{2}\right) + C \\
&= \frac{-1}{4}\left(\cos^2 x + 2\cos x\right) + \frac{1}{4} + C
\end{aligned}$$

ここで、$\dfrac{1}{4}$ と C はともに定数より　$K = \dfrac{1}{4} + C$　と改めて

$$\int f(x)dx = \frac{-1}{4}\left(\cos^2 x + 2\cos x\right) + K \quad \cdots \boxed{\text{チ}}\sim\boxed{\text{ト}}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(x)dx &= -\frac{1}{4}\left[\cos^2 x + 2\cos x\right]_a^b \\
&= -\frac{1}{4}\left\{\left(\cos^2 b + 2\cos b\right) - \left(\cos^2 a + 2\cos a\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{4}\left\langle\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\right\} - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\right\}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{7}{16}-\frac{5}{4}\right)$$

$$= \underline{\frac{27}{64}}$$

総 評

〔Ⅰ〕

数列の基本的な問題から始まり、後半は(等差数列)×(等比数列)の和の問題であるが、誘導が比較的丁寧にされているので、きちんと誘導に乗れればそこまで難しくない。完答したい問題である。

〔Ⅱ〕

数字を作る問題で場合の数では典型的な問題である。(3)の最後が若干計算がややこしく、とくに同じ数字を 2 個ずつ使う場合の配置パターンは${}_4C_2$通りではなく、$\dfrac{{}_4C_2}{2!}$通りであることなどを見落とす受験生もいそうである。

〔Ⅲ〕

分点の位置ベクトルおよび、長さの比を用いた面積の比較がテーマの基本問題。どちらも受験対策をきちんとしていれば一度は類題を解いたことがあるであろう問題。これは完答したい。

〔Ⅳ〕

前半は関数の増減、後半は絶対値のついた関数の定積分の問題。どちらも基本レベルの内容ではあるが、後半の絶対値付きの関数の積分は苦手な受験生も多いので計算ミスをした受験生もいそうである。

〔Ⅴ〕

円とその内部の三角形に関する角度や大きさの問題。前半はとくに難しいことはないが、最後のAE^2はできた受験生とそうでない受験生が分かれそうである。とはいえ解法は複数あり、解答では直角三角形の比で解いているが、三角形OAEが二等辺三角形になるので余弦定理を利用して求めることもできる。

〔Ⅵ〕

三角関数の微分積分の問題。$f(x)$の一次導関数、二次導関数ともにさほど難しい計算もなく、$\cos x$が単調減少であることなどの見落としなどしなければそこまで難しい問題ではない。

意外と不定積分を計算して出てきた$\dfrac{1}{4}$を改めて積分定数にまとめて良いことを忘れて解答欄に合わないと戸惑った受験生もいそうである。