# ― 芝浦工業大学 ―

## 2 月 21 日（日）後期日程　数学

**解 答・解 説**

### 1．

(1) $P(x)$を $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ で割ったときの商を$Q$、余りを $ax+b$ とすると

$$P(x)=(x-2)(x+1)Q+ax+b$$

と表せ、剰余の定理から

$$\begin{cases} P(2)=7 \\ P(-1)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+b=7 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

これを解いて $a=2$、$b=3$ であるから、求める余りは $\underline{2x+3}$ … (ア)

(2) $\cos\theta-\sin 2\theta \geqq 0$

$$\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta \geqq 0$$

$$\cos\theta(1-2\sin\theta)\geqq 0$$

より

( i ) $\cos\theta \geqq 0$ かつ $1-2\sin\theta \geqq 0$

( ii ) $\cos\theta \leqq 0$ かつ $1-2\sin\theta \leqq 0$

のいずれかであればよい. $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲内において

( i )を満たすのは

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\pi$ の共通部分であるが、これは共通部分をもたない。

( ii )を満たすのは

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ と $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ の共通部分で、$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって求める$\theta$の範囲は $\underline{\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi}$ … (イ)

(3)
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x}\left(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x}\cdot\frac{(2x+5)-2x}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2+\dfrac{5}{x}}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\frac{5\sqrt{6}}{4}} \quad \cdots \quad \boxed{(ウ)}$$

(4) $\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos 60^\circ$ より

$$t\cdot(-1)+(t+1)\cdot 1 = \sqrt{t^2+(t+1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$2 = \sqrt{4t^2+4t+2}$$

この両辺を2乗して

$$4 = 4t^2+4t+2$$

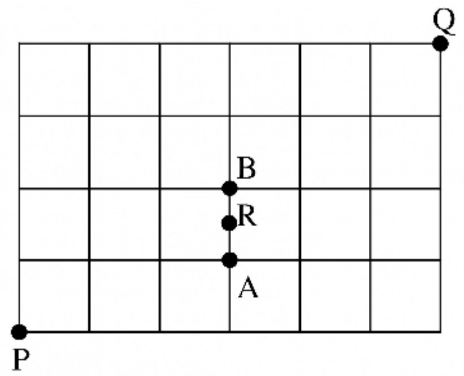
$$2t^2+2t-1=0$$

これを解くと $t = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

$0<t$ より $t = \underline{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}}$ $\cdots$ $\boxed{(エ)}$

(5) PからQまでの最短経路の総数は

$\dfrac{10!}{6!4!} = 210$ 通り




図のように地点A、Bを考えると、

点Rを通ってPからQまで最短で

辿るのは P→A→B→Q の順に

最短で辿ることとなりその総数は

$\dfrac{4!}{3!1!}\times 1\times\dfrac{5!}{3!2!} = 40$ 通り

よって、点Rを通らずPからQまで最短距離でいく道順は

$210-40=\underline{170}$ 通り $\cdots$ $\boxed{(オ)}$

# 2.

$z=\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$

(1) ド・モアブルの定理より

$$z^5=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$z^5+1=0$$

$$(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=0$$

ここで

$$z+1=\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}+1\neq 0$$

であるから

$$z^4-z^3+z^2-z+1=\underline{0}\quad\cdots\ ①$$

(2) ド・モアブルの定理より

$$z^2=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\neq 0$$

なので①の両辺を$z^2$で割ると

$$z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$

$$z^2+\frac{1}{z^2}-\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0$$

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2-w+1=0$$

$$w^2-w-1=0\quad\cdots\ ②$$

$$w^2-w=\underline{1}$$

(3) ②を解くと

$$w=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\quad\cdots\ ③$$

ここで $|z|=1$ なので

$$\frac{1}{z}=\bar{z}=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$$

であるから

$$w=z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{\pi}{5}>0$$

なので

$$\underline{w=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

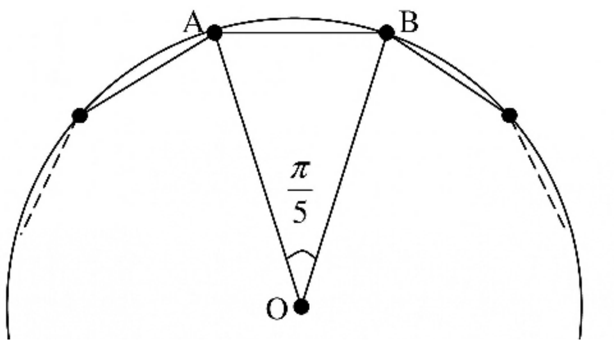
(4) 半径1の円の中心をOとし、その円に内接する

正十角形の頂点のうち、隣り合う2頂点をA、

Bとする。このとき、△OABは

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1、\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{5}$$

の二等辺三角形である。




ここで(3)より

$$w=2\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

から

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

なので、△OABにおける余弦定理から

$$\mathrm{AB}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

よって、半径1の円に内接する正十角形の1辺の長さの2乗は $\underline{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

# 3．

(1) 真数条件より $0<x$、$0<y$ であり

$\log_2 x+\log_8 y=1$

$\log_2 x+\dfrac{\log_2 y}{\log_2 8}=1$

$\log_2 x+\dfrac{1}{3}\log_2 y=1$

$3\log_2 x+\log_2 y=3$

$\log_2 x^3+\log_2 y=\log_2 8$

$\log_2 x^3 y=\log_2 8$

この真数の比較より

$x^3 y=8$

$x^3=\dfrac{8}{y}$

なので

$x^3+y=\dfrac{8}{y}+y \quad \cdots ①$

ここで、$0<\dfrac{8}{y}$、$0<y$ より、相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{1}{y}+y\geqq 2\sqrt{\dfrac{8}{y}\cdot y}=4\sqrt{2}$

等号が成立するのは $\dfrac{8}{y}=y$ すなわち $y^2=8$ のときで、これを満たす $y\,(=2\sqrt{2}\,)$は $0<y$ の範囲で存在するので、等号が成立する場合が起こり得る。

よって①から

$x^3+y\geqq 4\sqrt{2}$

なので $x^3+y$ の最小値は$\underline{4\sqrt{2}}$ $\cdots$ $\boxed{(ア)}$

(2) $S_{n+1}=2S_n+a_1$ $(n=1,2,3,\Lambda)\cdots ①$

①より

$S_n=2S_{n-1}+a_1$ $(n=2,3,4\Lambda)\cdots ②$

なので①－②より

$a_{n+1}=2a_n$ $(n=2,3,4\Lambda)$

であるから、$2\leqq n$ において

$a_n=a_1\cdot 2^{n-1}$

よって

$$S_n=\frac{a_1\left(2^n-1\right)}{2-1}=a_1\left(2^n-1\right)$$

なので

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\cdot 2^{n-1}}{a_1\left(2^n-1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}=\underline{\frac{1}{2}}\quad\cdots\quad\boxed{(\text{イ})}$$

(3) $$\int_0^\pi(\sin\theta+a)^2d\theta=\int_0^\pi\left(\sin^2\theta+2a\sin\theta+a^2\right)d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}+2a\sin\theta+a^2\right)d\theta$$

$$=\int_0^\pi\left(-\frac{1}{2}\cos2\theta+2a\sin\theta+a^2+\frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\sin2\theta-2a\cos\theta+\left(a^2+\frac{1}{2}\right)\theta\right]_0^\pi$$

$$=\left\{-\frac{1}{4}\sin2\pi-2a\cos\pi+\left(a^2+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}-\left(-\frac{1}{4}\sin0-2a\cos0\right)$$

$$=\pi a^2+4a+\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi\left(a^2+\frac{4}{\pi}a\right)+\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi\left(a+\frac{2}{\pi}\right)^2-\frac{4}{\pi}+\frac{\pi}{2}$$

であるから、$a=-\dfrac{2}{\pi}$ において、最小値 $\underline{-\dfrac{4}{\pi}+\dfrac{\pi}{2}}$ をとる．… $\boxed{(\text{ウ})}$

(4) 試行Sを10回行って持ち点が8点より大きい、すなわち9点か10点となる確率は

$$_{10}C_9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=(10+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{11}{1024}$$

であるから、この余事象の確率より、試行Sを10回行って持ち点が8点以下となる確率は

$$1-\frac{11}{1024}=\underline{\frac{1013}{1024}}\quad\cdots\quad\boxed{(\text{エ})}$$

試行Tを1回行ったとき、もらえる得点が

・0点となるのは「さいころで１か２の目が出る」か「硬貨が１の面でかつ、さいころは０または２の目がでる」ときなので、その確率は

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

・1点となるのは「硬貨が１の面でかつ、さいころは３または４の目がでる」ときなので、その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

・2 点となるのは「硬貨が 1 の面でかつ、さいころは 5 または 6 の目がでる」ときなので、その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

T を1回行ったとき、もらえる得点が 0 点、1 点、2 点となる各事象を$O$、$A$、$B$とすると、T を 3 回行って持ち点が 3 となるような事象の組み合わせは「$A$が 3 回」または「$O$、$A$、$B$」が 1 回ずつが考えられるので、そのようになる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3+3!\times\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\underline{\frac{25}{216}}\quad\cdots\quad\boxed{(オ)}$$

# 4．

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2}$$

(1) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+2)-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=-\dfrac{x^2-2}{(x^2+2)^2}=-\dfrac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+2)^2}$

より、$f(x)$の増減表は右のようになる。

| $x$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | ＋ | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ | ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | ↘ |

よって$f(x)$の極値は

$$\begin{cases}\cdot\ 極大値:\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ (x=\sqrt{2}) \\ \cdot\ 極小値:-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ (x=-\sqrt{2})\end{cases}$$

(2) $C$上の点$(t,f(t))$における接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$=-\frac{t^2-2}{(t^2+2)^2}(x-t)+\frac{t}{t^2+2}\quad\cdots ①$$

これが点$(-2,0)$を通るとき、

$$0=-\frac{t^2-2}{(t^2+2)^2}(-2-t)+\frac{t}{t^2+2}$$

この両辺に$(t^2+2)^2$をかけて

$$0=(t^2-2)(2+t)+t(t^2+2)$$
$$0=(t^2-2)(2+t)+t(t^2+2)$$
$$2t^3+2t^2-4=0$$
$$t^3+t^2-2=0$$
$$(t-1)(t^2+2t+2)=0\quad\cdots ②$$

ここで

$$t^2+2t+2=(t+1)^2+1>0$$

なので②の実数解は $t=1$ である。

よって$l$の方程式は、これを①へ代入、整理して

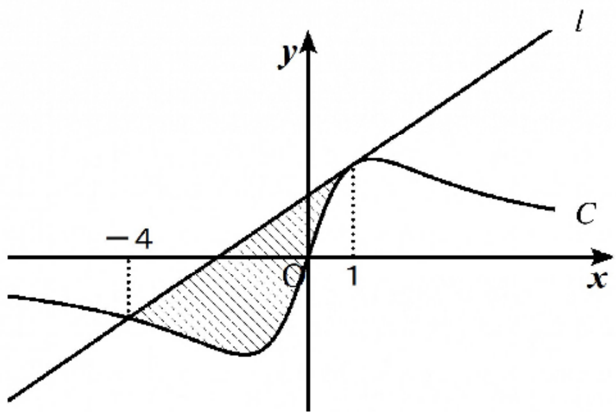
$$y=\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}$$

(3) $C$と$l$の共有点は

$$\frac{x}{x^2+2}=\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}$$

の実数解より、これを整理して

$$x^3+2x^2-7x+4=0$$
$$(x-1)^2(x+4)=0$$



であるから、$C$ と $l$ は $x=-4$ において交わっている．

よって $C$ と $l$ で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{1}\left\{\left(\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}\right)-\frac{x}{x^2+2}\right\}dx &= \left[\frac{1}{18}x^2+\frac{2}{9}x-\frac{1}{2}\log\left(x^2+2\right)\right]_{-4}^{1}\\ &= \frac{1}{18}(1-16)+\frac{2}{9}(1+4)-\frac{1}{2}(\log 3-\log 18)\\ &= -\frac{5}{6}+\frac{10}{9}-\frac{1}{2}\log\frac{1}{6}\\ &= \underline{\frac{5}{18}+\frac{1}{2}\log 6}\end{aligned}$$

## 総 評

### 1．

小問集合であるが、すべて各出題分野の基本的な問題であり、入試対策をきちんとしていれば落とすことのできない問題である。

### 2．

複素数平面分野のお約束の問題である。最後の正十角形の1辺の長さに関しても、$\cos\frac{\pi}{5}$ を求めるまでは典型問題として有名なので、そこまで難しい問題ではない。

### 3．

1.同様の小問集合であるが、こちらもどの問題も特に難しい内容のものはない。ただし、1.よりは計算が面倒なものも多いので丁寧に解いていきたい。

### 4．

数学Ⅲの微分積分の問題。$f(x)$の導関数も計算は難しい内容ではなく、$C$と$l$の交点を求める計算、面積を求めるための定積分も標準的な計算であるから、難しい内容ではない。

全体を通して基本～標準的な内容の問題が多く、入試問題集などで対策をしっかりしていればどれも全く手がつかないということはない問題ばかりである。
前期の試験に比べると大幅に易化していると言ってもよく、平均点はそこそこ高いと思われる。