― 芝浦工業大学 ―

2月1日（火）前期日程　数学

解答・解説

1．

(1)(Ⅰ) U が空集合となるのは、$x^2 \leqq a$ が実数解をもたないときであるから

$\underline{a<0}$ … $\boxed{(ア)}$

(Ⅱ) $U=V$ となるのは、$\begin{cases} x^2 \leqq a \\ x^2 \leqq a^2 \end{cases}$ が同値であるとき、すなわち

$a=a^2$ となるときであるから、これを解いて

$a(a-1)=0$

$a=\underline{0,1}$ … $\boxed{(イ)}$

(Ⅲ) $U \subset V$ となるには次の(ⅰ)と(ⅱ)の場合が考えられる。

(ⅰ) U が空集合となれば常に成り立つので、そのような範囲は(Ⅰ)より

$a<0$ … ①

(ⅱ) $x^2 \leqq a$ の解が $x^2 \leqq a^2$ の解の部分集合であればよくそのようになるには

$\begin{cases} 0 \leqq a \\ a \leqq a^2 \end{cases}$ をともに満たすときである。

$a \leqq a^2$ を解くと

$a(a-1) \geqq 0$

$a \leqq 0, 1 \leqq a$

これと $0 \leqq a$ の共通部分は

$a=0, 1 \leqq a$ … ②

①と②の和集合より、$U \subset V$ となる条件は

$\underline{a \leqq 0, 1 \leqq a}$ … $\boxed{(ウ)}$

(2) $169^{\log_{13}(x-1)} = x\left(1-11^{\log_{121}(x-2)^4}\right)$ … ①

真数条件より

$\begin{cases} 0 < x-1 \\ 0 < (x-2)^4 \end{cases}$ をともに満たすので

$1 < x < 2,\ 2 < x$ … ②

また

・$169^{\log_{13}(x-1)} = 13^{2\log_{13}(x-1)} = 13^{\log_{13}(x-1)^2} = (x-1)^2$

・$11^{\log_{121}(x-2)^4} = 11^{4\log_{121}(x-2)} = 11^{4\cdot\frac{\log_{11}(x-2)}{\log_{11}121}} = 11^{\log_{11}(x-2)^2} = (x-2)^2$

なので①は

$(x-1)^2 = x\left\{1-(x-2)^2\right\}$

$x^2-2x+1 = x\left(-x^2+4x-3\right)$

$x^3-3x^2+x+1=0$

これを解くと

$(x-1)\left(x^2-2x-1\right)=0$

$x = 1, 1\pm\sqrt{2}$

であり、このうちにを満たすものは $x = \underline{1+\sqrt{2}}$ … $\boxed{(エ)}$

(3) $x^2(y^2+1)+2x(y-4)+y(y-8)\leqq 0$

これを展開整理すると

$x^2y^2+x^2+y^2+2xy-8x-8y\leqq 0$ … ①

ここで

$$\begin{cases} s=x+y \\ t=xy \end{cases}$$

とする.

このとき x 、 y は m の 2 次方程式

$m^2-sm+t=0$

の実数解より、この判別式を D とすると

$D\geqq 0$

であるから

$s^2-4t\geqq 0$

$t\leqq \frac{1}{4}s^2$ … ②

ここで

$p=2xy-x-y$ すなわち

$p=2t-s$ … ③

とおく。

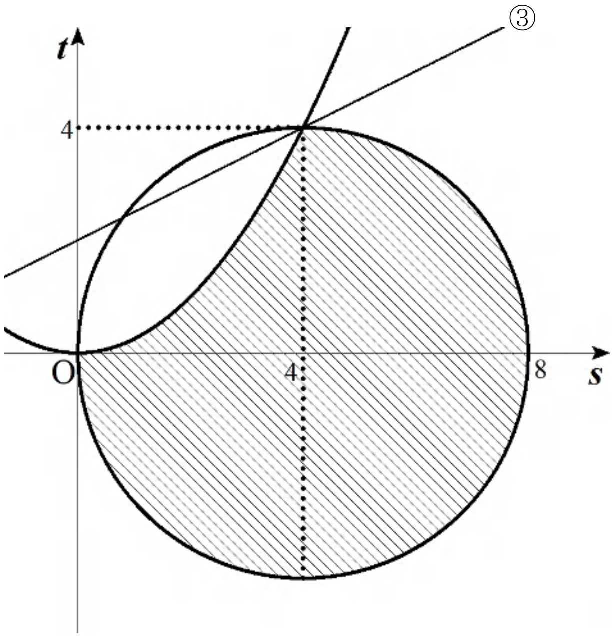
このとき①は

$(xy)^2+(x+y)^2-8(x+y)\leqq 0$

$s^2+t^2-8s\leqq 0$

$(s-4)^2+t^2\leqq 16$ … ④

であり、 st 平面において②、④を満たす領域を D とすると、 D は図の境界を含む斜線部。



よって求める最大値は、直線③すなわち

$t=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}p$

が領域 D を通るような p の最大値と一致し、この直線の傾きからそれは点 $(4,4)$ を通るときより

$p=2\cdot 4-4=4$

であるから、求める最大値は $\underline{4}$ … (オ)

2.

(1) $(n+2)a_{n+1}=S_n+\dfrac{1}{2n+2}$ $\cdots$ ①

①に $n=2$ を代入すると

$4a_3=S_2+\dfrac{1}{6}$ $\cdots$ ②

また $S_3=\dfrac{47}{48}$ より

$S_2+a_3=\dfrac{47}{48}$

$a_3=\dfrac{47}{48}-S_2$

なので，これを②へ代入すると

$4\left(\dfrac{47}{48}-S_2\right)=S_2+\dfrac{1}{6}$

$S_2=\underline{\dfrac{3}{4}}$

(2) $S_1=a_1$ に注意して，①に $n=1$ を代入すると

$3a_2=a_1+\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ ③

(1)より $S_2=\dfrac{3}{4}$ なので

$a_1+a_2=\dfrac{3}{4}$

$a_2=\dfrac{3}{4}-a_1$

これを③へ代入して

$3\left(\dfrac{3}{4}-a_1\right)=a_1+\dfrac{1}{4}$

$a_1=\underline{\dfrac{1}{2}}$

(3) ①より

$S_n=(n+2)a_{n+1}-\dfrac{1}{2(n+1)}$ （$1\leqq n$） $\cdots$ ④

なので

$S_{n-1}=(n+1)a_n-\dfrac{1}{2n}$ （$2\leqq n$） $\cdots$ ⑤

$2\leqq n$ において $S_n-S_{n-1}=a_n$ であることに注意して，④－⑤より

$a_n=(n+2)a_{n+1}-\dfrac{1}{2(n+1)}-\left\{(n+1)a_n-\dfrac{1}{2n}\right\}$

$$(n+2)a_{n+1}-(n+2)a_n=-\frac{1}{2n(n+1)}$$

より

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2n(n+1)(n+2)}=-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\ (2\leqq n)$$

であるから，$2\leqq n$ において

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=a_1+(a_2-a_1)+\sum_{k=2}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=a_2-\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\ \cdots ⑥$$

ここで

・$\begin{cases} S_2=\dfrac{3}{4} \\ a_1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ より

$$a_2=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

・$$\sum_{k=2}^{n-1}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}=\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)\Lambda+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{n(n+1)}$$

であるから⑥より

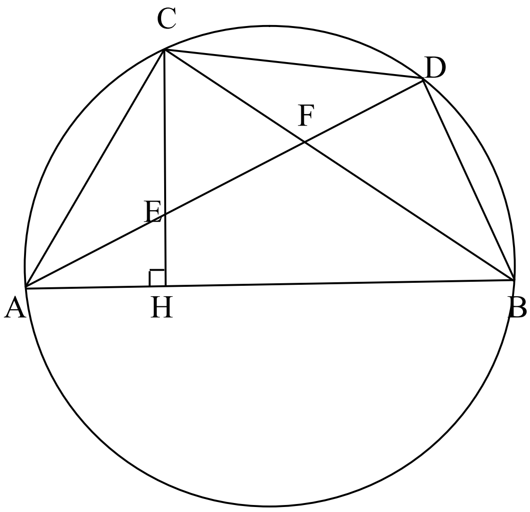
$$a_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}=\frac{5}{24}+\frac{1}{4n(n+1)}$$

これは$a_1=\dfrac{1}{2}$は満たさない．

よって

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & (n=1) \\ \dfrac{5}{24}+\dfrac{1}{4n(n+1)} & (2\leqq n) \end{cases}$$

3



$AH = x$　としたとき、△ACH と△BCH

における三平方の定理から、CH^2 について

$$6^2 - x^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 - (10 - x)^2$$

これを解いて

$x = 2$

よって　$AH = 2$　…　(ア)

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$$
$$= AB\cdot AH$$
$$= 10\cdot 2$$
$$= \underline{20}\ \cdots\ \boxed{(イ)}$$

AE は∠HAC の二等分線なので

$HE : CE = 2 : 6 = 1 : 3$

であるから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH} + \frac{1}{4}\vec{c} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} = \underline{\frac{3}{20}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}}\ \cdots\ \boxed{(ウ)}$$

AD と BC の交点を F とすると、AF は∠BAC の二等分線なので

$BF : CF = 10 : 6 = 5 : 3$

であるから

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{8}\vec{b} + \frac{5}{8}\vec{c} = \frac{1}{8}\left(3\vec{b} + 5\vec{c}\right)\ \cdots\ ①$$

よって

$$\left|\overrightarrow{AF}\right|^2 = \left|\frac{1}{8}\left(3\vec{b} + 5\vec{c}\right)\right|^2 = \frac{1}{8^2}\left(9\left|\vec{b}\right|^2 + 30\vec{b}\cdot\vec{c} + 25\left|\vec{c}\right|^2\right) = \frac{1}{8^2}(9\cdot 100 + 30\cdot 20 + 25\cdot 36) = \frac{2400}{8^2}$$

より

$$AF = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

ここで

$$\begin{cases} BF = \dfrac{5}{8}BC = \dfrac{5\sqrt{6}}{2} \\ CF = \dfrac{3}{8}BC = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

であるから、方べきの定理より

$$AF\cdot DF = CF\cdot BF$$

$$\frac{5\sqrt{6}}{2}\cdot \mathrm{DF}=\frac{5\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\mathrm{DF}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

なので、

$$\mathrm{AF}:\mathrm{DF}=\frac{5\sqrt{6}}{2}:\frac{3\sqrt{6}}{2}=5:3 \quad \cdots ②$$

これは、△ABC と△DBC において、BC を共通の底辺と見たときの高さの比であり、それは△ABC と△DBC の面積の比と一致する。ここで

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\cdot\left|\vec{c}\right|^2-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{10^2\cdot 6^2-20^2}=20\sqrt{2}$$

であるから、四角形 ABDC の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}+\triangle \mathrm{DBC}=\triangle \mathrm{ABC}+\frac{3}{5}\triangle \mathrm{ABC}=\frac{8}{5}\triangle \mathrm{ABC}=\frac{8}{5}\cdot 20\sqrt{2}=\underline{32\sqrt{2}} \quad \cdots \boxed{(エ)}$$

また、①、②より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{8}{5}\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{8}{5}\cdot\frac{1}{8}\left(3\vec{b}+5\vec{c}\right)=\frac{3}{5}\vec{b}+\vec{c} \quad \cdots \boxed{(オ)}$$

4

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t dt \quad \cdots$ ①

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)' dt$$
$$=\left[t\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{\pi}{4}$$

であるから、①より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\cos t dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\underline{\frac{\pi}{8}}$$

(2) $Z(z)$を原点Oを中心に$-\dfrac{\theta}{2}$回転させた点を$W(w)$とすると

$$w=z\left\{\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right\}=(1+\theta i)\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\cos\frac{\theta}{2}+\theta\sin\frac{\theta}{2}+i\left(\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$W(w)$を実軸に関して対称移動させた点を$W(w')$とすると

$$w'=\overline{w}=\cos\frac{\theta}{2}+\theta\sin\frac{\theta}{2}-i\left(\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

この$W(w')$を原点を中心に$\dfrac{\theta}{2}$回転させた点が$Z'(z')$であるから

$$z'=w'\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)=\left\{\cos\frac{\theta}{2}+\theta\sin\frac{\theta}{2}-i\left(\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

となるので

$$f(\theta)=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}-i\left(\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)i\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}+\theta\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=\underline{\cos\theta+\theta\sin\theta}$$

$$g(\theta)=\left(\cos\frac{\theta}{2}+\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}-\left(\theta\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\theta\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\underline{\sin\theta-\theta\cos\theta}$$

(3) (2)より

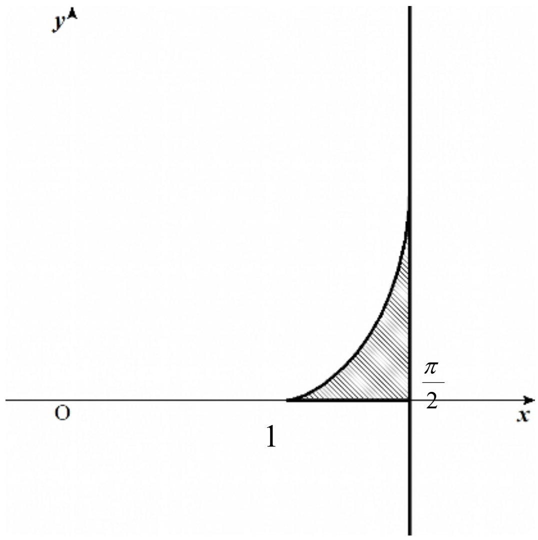
$$\begin{cases}x=\cos\theta+\theta\sin\theta\\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta\end{cases}$$

であるから

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta=\theta\sin\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において、$\begin{cases}\dfrac{dx}{d\theta}\geqq 0\\ \dfrac{dy}{d\theta}\geqq 0\end{cases}$ であり,

$\begin{cases}f(0)=1\\ g(0)=0\end{cases}$、$\begin{cases}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\end{cases}$ なので、求める面積を



S とすると S は右図の斜線部の面積であるから

$$S=\int_1^{\frac{\pi}{2}}ydx=\int_1^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\theta\cos\theta)dx \quad \cdots ②$$

ここで x と θ の対応は右のようになり、

x	1	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$
θ	0	$\to$	$\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{dx}{d\theta}=\theta\cos\theta$$

より

$$dx=\theta\cos\theta d\theta$$

なので②は

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta-\theta\cos\theta)\theta\cos\theta d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta\sin\theta\cos\theta-\theta^2\cos^2\theta\right)d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\cos\theta d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2 d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos 2\theta d\theta\right) \quad \cdots ③$$

ここで

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2 d\theta=\left[\frac{1}{3}\theta^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

・$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos 2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)' d\theta$

$$=\left[\theta^2\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta d\theta$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin 2\theta d\theta \quad\cdots\ ④$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin 2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)' d\theta$$

$$=\left[\theta\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{4}$$

であるから④より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2\cos 2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって③は

$$S=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{24}-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^3}{48}}$$

より、これが求める面積である。

総 評

例年通り大問４つ、奇数番が空欄補充、奇数番が記述であった。

1

(1)は集合と二次不等式の基本問題。これは落とせない。

(2)は真数条件の確認を忘れないことと、$a^{\log_a b}=b$ の変換がきちんとできれば簡単な問題であり、これも落としてはいけない。

(3)まず不等式を展開、整理をしてみて、x と y の二次の対称式であることに気が付いた上で、$\begin{cases} s=x+y \\ t=xy \end{cases}$ などで置き換えることを思いつくかどうかが重要な分かれ目であろう。その後、円と直線が接する条件と考えることができるかというところは典型的な演習がきちんとできていればそこまで難しくはない。とはいえ、前半でつまづいた受験生は多そうである。

2

(1),(2)は簡単であり、漸化式と$S_3=\dfrac{47}{48}$を用いて各値についての方程式を解けばよい。

(3)はまず $S_n-S_{n-1}=a_n\,(\,2\leqq n\,)$ を利用するところも見た目だけでは思いつきにくいが、それくらいしか式のいじりようがないため、$a_{n+1}-a_n$ をnで表すところまではできた受験生も多いのではないだろうか。しかし、これが $2\leqq n$ の話であることを見落として

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{k+1}+a_k\right)$$

で計算してしまうと、a_2やa_3の値が合わないので要注意。

解けたと思ってそのまま次へ進み、間違えたことに気付かない受験生も多いと思う。

3

ベクトルと円に内接する四角形の問題である。二等分線定理やベクトルの基本計算が身についていれば $\boxed{\text{(ウ)}}$ まではそこまで難儀することはないであろうが、$\boxed{\text{(エ)}}$ からはつまづいた受験生も多そうである。

円に内接する四角形、対角線とくれば「『方べきの定理』か『トレミーの定理』を使うのではないか？」と怪しむようにすると良い。

4

複素数平面の直線に関する対称移動および媒介変数の積分による求積問題である。

(1)は最後の問題の計算の一部のヒントとなるサービス問題。

(2)は直線に関する対称移動の問題である。対称移動は一見ややこしそうに見えるが、理解できてしまえば大して難しいことはしていない。とはいて、私の個人的な感覚ではあるが、全体的に複素数平面が苦手という受験生も多いように感じるのと、計算を丁寧にやらないと$\frac{\theta}{2}$のままになってしまうので、ここでも差がついていると思う。

(3)は(2)ができてしまえばさして難しくはないと思うが、最後の定積分の計算を間違えないように丁寧にやりたい。