― 芝浦工業大学 ―

2 月 4 日（金）全学統一日程　数学

解 答・解 説

1.

(1) $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$ であるから

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$$
$$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}^2-2(\alpha\beta)^2$$
$$=(3^2-2\cdot1)^2-2\cdot1^2$$
$$=\underline{47}\ \cdots\ \boxed{(ア)}$$

(2) $8^x-7\cdot2^x=6$

$(2^x)^3-7\cdot2^x-6=0$

$(2^x+1)\{(2^x)^2-2^x-6\}=0$

$(2^x+1)(2^x+2)(2^x-3)=0$

$0<2^x$ より $2^x=3$ であるから

$x=\underline{\log_2 3}\ \cdots\ \boxed{(イ)}$

(3) $$p_n=\frac{{}_nC_1\cdot{}_nC_1\cdot{}_nC_1}{{}_{3n}C_3}=\frac{n\cdot n\cdot n}{\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{3\cdot2}}=\frac{2n^2}{(3n-1)(3n-2)}=\frac{2}{\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(3-\frac{2}{n}\right)}=\frac{2}{3\cdot3}=\underline{\frac{2}{9}}\ \cdots\ \boxed{(ウ)}$$

(4) O から AB に下した垂線の足を H とし,

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB}$

とすると

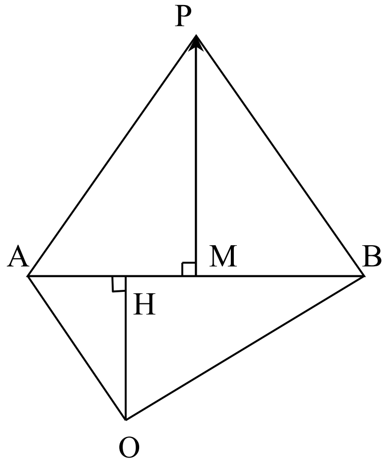
$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ なので

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\{s\overrightarrow{OA}+(1-s)\overrightarrow{OB}\}\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=0$

$-s|\overrightarrow{OA}|^2+(1-s)|\overrightarrow{OB}|^2=0$

$-s+12(1-s)=0$



$s=\dfrac{12}{13}$

より

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{12}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{13}\left(12\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

よって

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\dfrac{1}{13}\left|12\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\dfrac{1}{13}\sqrt{144\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}=\dfrac{1}{13}\sqrt{144+12}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

また、△OABにおける三平方の定理より

$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{13}$

△ABPは正三角形でMはABの中点より$\mathrm{MP}\perp\mathrm{AB}$なので

$\mathrm{MP}=\sqrt{13}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$

OH // MPなので

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\frac{\sqrt{39}}{2}}{\frac{2\sqrt{39}}{13}}\cdot\dfrac{1}{13}\left(12\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\dfrac{1}{4}\left(12\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

よって $(a,b)=\underline{\left(3,\dfrac{1}{4}\right)}$ $\cdots$ $\boxed{(エ)}$

(5) $x^3-6x^2-4x+k=0$ $\cdots$ ①

①の解をα, 3α, β ($0<\alpha$)とすると、解と係数の関係から

$$\begin{cases}\alpha+3\alpha+\beta=6\\ \alpha\cdot3\alpha+3\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha=-4\\ \alpha\cdot3\alpha\cdot\beta=-k\end{cases}$$

$$\begin{cases}4\alpha+\beta=6 & \cdots ②\\ 3\alpha^2+4\alpha\beta=-4 & \cdots ③\\ 3\alpha^2\beta=-k & \cdots ④\end{cases}$$

②より

$\beta=6-4\alpha$ $\cdots$ ②'

これを③へ代入して

$3\alpha^2+4\alpha(6-4\alpha)=-4$

$13\alpha^2-24\alpha-4=0$

$(13\alpha+2)(\alpha-2)=0$

$0<\alpha$ であるから $\alpha=2$

②'より $\beta=-2$

よって④から

$3 \cdot 2^2 \cdot (-2) = -k$

$k = \underline{24}$ $\cdots$ $\boxed{(オ)}$

2.

(1) $T_n=\sum_{k=1}^{n}kz^k=z+2z^2+3z^3+\Lambda\Lambda+nz^n$　$\cdots$ ①

$zT_n=\sum_{k=1}^{n}kz^{k+1}=\quad z^2+2z^3+\Lambda\Lambda+(n-1)z^n+nz^{n+1}$　$\cdots$ ②

①－②より

$$T_n-zT_n=z+z^2+z^3+\Lambda\Lambda+z^n-nz^{n+1}$$

$$(1-z)T_n=\frac{z(1-z^n)}{1-z}-nz^{n+1}$$

$z\neq1$　なので

$$\underline{T_n=\frac{z(1-z^n)}{(1-z)^2}-\frac{nz^{n+1}}{1-z}}\quad\cdots ③$$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\sin(2k\theta_n)=\sin(2\theta_n)+2\sin(4\theta_n)+3\sin(6\theta_n)+\Lambda+n\sin(2n\theta_n)$

であるから、これは

$$z=\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

としたときのT_nの虚部である。

このときド・モアブルの定理より

$$z^n=\cos2\pi+i\sin2\pi=1$$

なので③は

$$T_n=-\frac{nz}{1-z}=\frac{n(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)}{(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)-1}$$

$$=\frac{n(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)}{(\cos2\theta_n-1)+i\sin2\theta_n}$$

$$=\frac{n(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)\{(\cos2\theta_n-1)-i\sin2\theta_n\}}{\{(\cos2\theta_n-1)+i\sin2\theta_n\}\{(\cos2\theta_n-1)-i\sin2\theta_n\}}$$

$$=\frac{n\{(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)(\cos2\theta_n-i\sin2\theta_n)-(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)\}}{(\cos2\theta_n-1)^2+\sin^2 2\theta_n}$$

$$=\frac{n\{(\cos^2 2\theta_n+\sin^2 2\theta_n)-(\cos2\theta_n+i\sin2\theta_n)\}}{\cos^2 2\theta_n-2\cos2\theta_n+1+\sin^2 2\theta_n}$$

$$=\frac{n\{(1-\cos2\theta_n)-i\sin2\theta_n\}}{2-2\cos2\theta_n}$$

であるから

$$S_n=-\frac{n\sin2\theta_n}{2-2\cos2\theta_n}=-\frac{n\cdot2\sin\theta_n\cos\theta_n}{2\{1-(1-2\sin^2\theta_n)\}}=-\frac{n\cos\theta_n}{2\sin\theta_n}=\underline{-\frac{n}{2\tan\theta_n}}$$

3．

(1) $f(x)=x^2$ とおくと $f'(x)=2x$ より $x=t$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$
$$=2t(x-t)+t^2$$
$$=2tx-t^2 \quad \cdots ①$$

これが $\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{7}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{7}{2}=\frac{9}{2}t-t^2$$
$$2t^2-9t+7=0$$
$$(t-1)(2t-7)=0$$
$$t=1,\ \frac{7}{2}$$

よって①より2本の接線の傾きは2と7であり

$\begin{cases}\tan\alpha=2\\ \tan\beta=7\end{cases}$ とすると $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ より加法定理から

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{7-2}{1+7\cdot 2}=\underline{\frac{1}{3}}\quad\cdots\ \boxed{(ア)}$$

(2) $f(x)-kx=(2-k)x+3\sqrt{4x^2+5}$

$k\leqq 2$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-kx\}$ は発散するので $2<k \quad\cdots ①$

$$f(x)-kx=\frac{(2-k)^2x^2-9(4x^2+5)}{(2-k)x-3\sqrt{4x^2+5}}=\frac{(k^2-4k-32)x^2-45}{(2-k)x-3\sqrt{4x^2+5}}=\frac{(k^2-4k-32)x-\dfrac{45}{x}}{(2-k)-3\sqrt{4+\dfrac{5}{x^2}}}$$

なので、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-kx\}$が収束するのは

$$k^2-4k-32=0$$

となるときより、これを解いて

$$(k-8)(k+4)=0$$

①から $k=\underline{8}\ \cdots\ \boxed{(イ)}$

(3) $f(x)=e^{-\sqrt{3}x}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

$$f'(x)=-\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+e^{-\sqrt{3}x}\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=e^{-\sqrt{3}x}\left\{-\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}$$
$$=e^{-\sqrt{3}x}\cdot 2\sin\left\{\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{5}{6}\pi\right\}$$

$$= 2e^{-\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{11}{12}\pi\right)$$

であるから、$0 \leqq x \leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は右のようになる。

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{13}{12}\pi$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\sin\frac{\pi}{12}$	↗	$\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}}$	↘	$-\frac{1}{2}e^{-\frac{13\sqrt{3}\pi}{12}}$	↗	$e^{-2\sqrt{3}\pi}\sin\frac{25}{12}\pi$

ここで

$$e^{-2\sqrt{3}\pi}\sin\frac{25}{12}\pi = e^{-2\sqrt{3}\pi}\sin\frac{1}{12}\pi < \sin\frac{1}{12}\pi$$

であるから $f(0) > f(2\pi)$ なので

$$M = f\left(\frac{\pi}{12}\right),\ m = f\left(\frac{13}{12}\pi\right)$$ である。

よって

$$\frac{M}{m} = \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi}}{-\frac{1}{2}e^{-\frac{13\sqrt{3}}{12}\pi}} = -e^{-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi-\left(-\frac{13\sqrt{3}}{12}\pi\right)} = -e^{\sqrt{3}\pi}$$

なので

$$\log\left|\frac{M}{m}\right| = \log e^{\sqrt{3}\pi} = \underline{\sqrt{3}\pi} \quad \cdots \boxed{(\text{ウ})}$$

(4) $g(x) = e^x$ とする。

$$\begin{cases} f(x) = 8 - ke^{-x} \\ g(x) = e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = ke^{-x} \\ g'(x) = e^x \end{cases}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ が共有点 $(a, f(a))$ で共通の接線をもつとき

$$\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$$ より

$$\begin{cases} 8 - ke^{-a} = e^a & \cdots ① \\ ke^{-a} = e^a & \cdots ② \end{cases}$$

②より

$$k = (e^a)^2 \quad \cdots ②'$$

これを①へ代入して

$$8 - e^a = e^a$$

$$e^a = 4 \quad \cdots ③$$

よって②'より

$$k = \underline{16} \quad \cdots \boxed{(\text{エ})}$$

よって

$f(x)=8-16e^{-x}$

であり、$f(x)=0$ を解くと

$8-16e^{-x}=0$

$2e^{-x}=1$

$e^{x}=2$

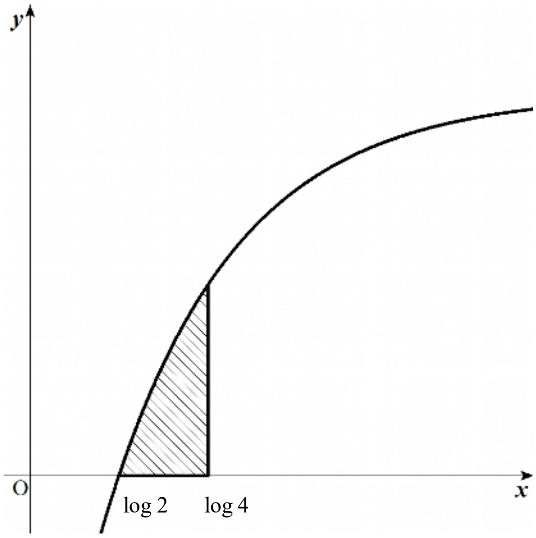
よって $x=\log 2$ なので，$y=f(x)$のグラフは

$x=\log 2$ において x 軸と交わる。

また③より

$a=\log 4$

であるから



x 軸、$x=a$ および $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_{\log 2}^{\log 4} f(x)dx=\int_{\log 2}^{\log 4}\left(8-16e^{-x}\right)dx=\left[8x+16e^{-x}\right]_{\log 2}^{\log 4}=\left(8\log 4+\frac{16}{4}\right)-\left(8\log 2+\frac{16}{2}\right)$$

$$=\underline{8\log 2-4}\ \cdots\ \boxed{(オ)}$$

4．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ -t+1 \end{pmatrix} \cdots ①$$

よって

$$\underline{\begin{cases} x=t \\ y=t+1 \\ z=-t+1 \end{cases}}$$

(2) $\mathrm{P}(t,t+1,-t+1)$からx軸に下した垂線の足をHとすると$\mathrm{H}(t,0,0)$であるから

$$\mathrm{PH}^2=(t+1)^2+(-t+1)^2=2t^2+2$$

であるから、$\mathrm{P}(t,t+1,-t+1)$をx軸の周りに回転させたときに描く曲線(円)とxy平面の交点をQとすると$\mathrm{Q}\left(t,\pm\sqrt{2t^2+2},0\right)$となるので、図形$S$を$xy$平面で切った切り口は、この$\mathrm{Q}$の$xy$平面上での軌跡、すなわち

$$\begin{cases} x=t \\ y=\pm\sqrt{2t^2+2} \end{cases}$$

が描く軌跡であり、その方程式を $y^2=f(x)$ としたとき

$$y^2=2t^2+2=2x^2+2$$

より

$$f(x)=\underline{2x^2+2}$$

(3) (2)よりSはxy平面上の曲線 $y^2=2x^2+2$ をx軸に関して回転させてできる図形なので

$$V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1(2x^2+2)dx=2\pi\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\underline{\frac{8}{3}\pi}$$

総 評

1.

どれも全体的に基礎を問う内容であり、(4)が若干計算が面倒ではあるが、これは完答したい。

2.

誘導がしっかりされているため、複素数平面の力が身についていて、誘導の意図がくみ取れればそこまで難しい問題ではないが、複素数平面が苦手な受験生が多いことや、(2)の計算が若干面倒なところで差がついたのではないだろうか。

3.

(1)、(2)、(4)は参考書や入試問題集などでもよく見かける タイプの典型問題なので落とせない。(3)は増減を調べるまでは難しくないが、$f(0)$、$f(2\pi)$、極値の大小を調べるところで手が止まった受験生も多いのではないだろうか。

4.

受験生が嫌いそうなタイプの問題であるが、誘導もあるため実はそこまで難しい問題ではない。とはいえ最後の問題であることと、一般的にこの手の問題は問題を見ただけで拒否反応が出る受験生が多いことを考えると、(2)、(3)が手つかずだった者も多いのではないか。逆にこういった問題に慣れている受験生には簡単な問題と拍子抜けしたのではないだろうか。

以上