― 芝浦工業大学 ―

2月21日（月）後期日程　数学

解 答・解 説

1.

(1) $2^x = 3^y = 144 = 2^4 \cdot 3^2$

であるから

$$x = \log_2\left(2^4 \cdot 3^2\right) = \log_2 2^4 + \log_2 3^2 = 2\log_2 3 + 4$$

$$y = \log_3\left(2^4 \cdot 3^2\right) = \log_3 2^4 + \log_3 3^2 = 4\log_3 2 + 2$$

なので

$$\begin{aligned}(x-4)(y-2) &= \{(2\log_2 3 + 4) - 4\}\{(4\log_3 2 + 2) - 2\} \\ &= 8\log_2 3 \cdot \log_3 2 \\ &= 8\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} \\ &= \underline{8} \quad \cdots \quad \boxed{(ア)}\end{aligned}$$

(2) 二項定理より

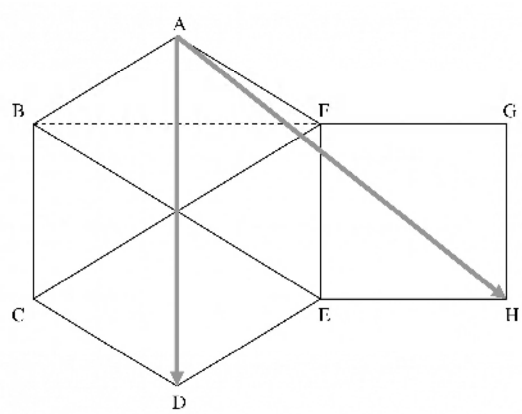
$$\begin{aligned}10.01^8 &= \left(10 + 10^{-2}\right)^8 \\ &= {}_8C_0 \cdot 10^8 + {}_8C_1 \cdot 10^5 + {}_8C_2 \cdot 10^2 + {}_8C_3 \cdot 10^{-1} + {}_8C_4 \cdot 10^{-4} + \Lambda + {}_8C_8 \cdot 10^{-16}\end{aligned}$$

この整数部分の下3桁の値は ${}_8C_2 \cdot 10^2 + {}_8C_3 \cdot 10^{-1}$ の下3桁の値に等しいので

$${}_8C_2 \cdot 10^2 + {}_8C_3 \cdot 10^{-1} = 28 \cdot 100 + 56 \cdot 0.1 = 2805.6$$

であるから，10.01^8 の整数部分の下3桁の値は$\underline{805}$ $\cdots$ $\boxed{(イ)}$

(3) $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \vec{f} = \overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とする。



$$\mathrm{BF} = 2 \times a\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}a$$

$$\mathrm{EH} = a$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{EH}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right)$$

よって

・$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}\right)=2\left(\vec{b}+\vec{f}\right)$

・$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\vec{b}+2\vec{f}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(-\vec{b}+\vec{f}\right)=\dfrac{1}{3}\left\{\left(3-\sqrt{3}\right)\vec{b}+\left(6+\sqrt{3}\right)\vec{f}\right\}$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\left(\vec{b}+\vec{f}\right)\cdot\frac{1}{3}\left\{\left(3-\sqrt{3}\right)\vec{b}+\left(6+\sqrt{3}\right)\vec{f}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(3-\sqrt{3}\right)\left|\vec{b}\right|^2+9\vec{b}\cdot\vec{f}+\left(6+\sqrt{3}\right)\left|\vec{f}\right|^2\right\}\quad\cdots\ ①$$

ここで

・$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{f}\right|=a$

・$\vec{b}\cdot\vec{f}=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{f}\right|\cdot\cos\dfrac{2}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}a^2$

であるから①は

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{2}{3}\left\{\left(3-\sqrt{3}\right)a^2-\frac{9}{2}a^2+\left(6+\sqrt{3}\right)a^2\right\}$$

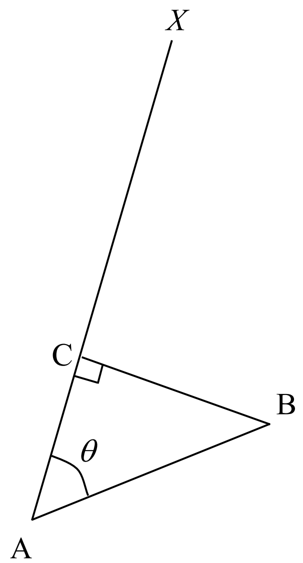
$$=\underline{3a^2}\quad\cdots\ \boxed{(ウ)}$$

(4) $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\left(3+4i\right)t=5t\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)\quad\cdots\ ①$

より

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\underline{\frac{3}{5}}\quad\cdots\ \boxed{(エ)}$$

θを $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{3}{5}\\ \sin\theta=\dfrac{4}{5}\end{cases}$ を満たす $0\leqq\theta<2\pi$ の角とする。



①からCは右図の半直線AX上の点となる。

BCの長さが最小となるのは、$\mathrm{BC}\perp\mathrm{AX}$

となるときであり、そのとき

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\cos\theta=\frac{3}{5}\mathrm{AB}$$

よって①から

$$5t=\frac{3}{5}$$

$$t=\underline{\frac{3}{25}}\quad\cdots\ \boxed{(オ)}$$

2.

(1) $a_1 = \underline{0}$, $b_1 = \underline{\dfrac{1}{3}}$, $c_1 = \underline{\dfrac{2}{3}}$

(2) $n+1$ 回目の試行 T で P が C にあるには次の 2 パターンが考えられる。

・P が n 回目の試行で A にあり，次の試行で C へ移動する。

・P が n 回目の試行で B にあり，次の試行で C へ移動する。

よって

$$c_{n+1} = a_n \cdot \frac{2}{3} + b_n \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(a_n + b_n) \quad \cdots ①$$

P は各回 A 、 B 、 C のいずれかにあるので

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

より

$$a_n + b_n = 1 - c_n \quad \cdots ②$$

よって①は

$$c_{n+1} = \frac{2}{3}(1 - c_n) = \underline{-\frac{2}{3}c_n + \frac{2}{3}}$$

より

$$c_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{3}\left(c_n - \frac{2}{5}\right)$$

これと

$$c_1 - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

より

$$c_n - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$c_n = \underline{\frac{2}{5} - \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}}$$

(3) $n+1$ 回目の試行で P が A にあるには次の 2 パターンが考えられる。

・P が n 回目の試行で B にあり，次の試行で A へ移動する。

・P が n 回目の試行で C にあり，次の試行で A へ移動する。

よって

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n \quad \cdots ③$$

$n+1$ 回目の試行で P が B にあるには次の 2 パターンが考えられる。

・P が n 回目の試行で A にあり，次の試行で B へ移動する。

・P が n 回目の試行で C にあり，次の試行で B へ移動する。

よって

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}c_n \quad \cdots ④$$

③－④より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(a_n-b_n\right)$$

であり、

$$a_1-b_1=-\frac{1}{3}$$

より

$$a_n-b_n=-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n-b_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots ⑤$$

また, (2)から②は

$$a_n+b_n=1-\left\{\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

$$a_n+b_n=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \quad \cdots ⑥$$

⑤＋⑥より

$$2a_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{5}$$

$$a_n=\underline{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{10}}$$

⑥－⑤より

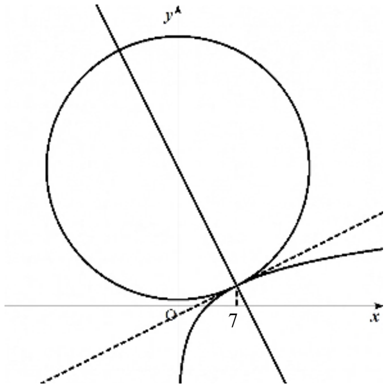
$$2b_n=-\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{5}$$

$$b_n=\underline{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{3}{10}}$$

3.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{-3x}==\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{-6}=e^{-6}=\underline{\frac{1}{e^6}}$ $\cdots$ $\boxed{\text{(ア)}}$

(2) $f(x)=\log x$ とおくと



$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

よって $y=f(x)$ の $(7,\log 7)$ における法線の方程式は

$y=-7(x-7)+\log 7=-7x+49+\log 7$

これが円 C の中心を通り、円 C の中心は y 軸上の点より

中心の座標は $(0,49+\log 7)$

よって円 C の半径を r とすると

$r=\sqrt{(7-0)^2+\{\log 7-(49+\log 7)\}^2}=\sqrt{7^2+49^2}=7\sqrt{50}=\underline{35\sqrt{2}}$ $\cdots$ $\boxed{\text{(イ)}}$

(3) $(\sin x+\cos x)\cos x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\sin x\cos x+\cos^2 x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\sin 2x+\cos 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$ ①

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ なので、この範囲において①を満たすのは

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{6}\pi$

$x=\underline{\dfrac{7}{24}\pi}$ $\cdots$ $\boxed{\text{(ウ)}}$

(4) $f(x)=\int_0^1 te^{|t-x|}dt$

$1<x$ のとき

$$e^{-x}f(x)=e^{-x}\int_0^1 te^{x-t}dt=\int_0^1 te^{-t}dt=\int_0^1 t\left(-e^{-t}\right)'dt$$
$$=\left[-te^{-t}\right]_0^1-\int_0^1\left(-e^{-t}\right)dt$$
$$=-e^{-1}-\left[e^{-t}\right]_0^1$$
$$=-e^{-1}-\left(e^{-1}-1\right)$$
$$=\underline{1-\frac{2}{e}}\ \cdots\ \boxed{（エ）}$$

$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f(x)=\int_0^x te^{x-t}dt+\int_x^1 te^{t-x}dt\ \cdots\ ①$$

ここで

・$\int_0^x te^{x-t}dt=\int_0^x t\left(-e^{x-t}\right)'dt=\left[-te^{x-t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{x-t}dt$
$$=-x+\left[-e^{x-t}\right]_0^x$$
$$=-x-1+e^x$$

・$\int_x^1 te^{t-x}dt=\int_x^1 t\left(e^{t-x}\right)'dt=\left[te^{t-x}\right]_x^1-\int_x^1 e^{t-x}dt$
$$=e^{1-x}-x-\left[e^{t-x}\right]_x^1$$
$$=e^{1-x}-x-\left(e^{1-x}-1\right)$$
$$=-x+1$$

であるから①は

$$f(x)=\left(-x-1+e^x\right)+\left(-x+1\right)=e^x-2x$$

よって　$0\leqq x\leqq 1$　において

$$f'(x)=e^x-2$$

また $1<x$　において

$$f(x)=e^x\left(1-\frac{2}{e}\right)$$

x	0		$\log 2$		1	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$		↘	最小	↗		↗

これは単調増加関数である.

よって $f(x)$ の増減は右上のようになる。

よって　$0\leqq x$　における $f(x)$ の最小値は

$f(\log 2)=\underline{2-2\log 2}\ \cdots\ \boxed{（オ）}$

4.

(1) $I(a)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(ax-\sin x)^2dx=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^2x^2-2ax\sin x+\sin^2 x)dx$

$$=2\left(a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2dx-2a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx\right)\ \cdots\ ①$$

ここで

・$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{12}$

・$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx=[-x\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$

$$=0+[\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2$$

・$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dx=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$

より①は

$I(a)=2\left(\frac{\pi^3}{12}a^2-4a+\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\frac{\pi^3}{6}a^2-8a+\pi}$

(2) (1)より

$I(a)=\frac{\pi^3}{6}\left(a^2-\frac{48}{\pi^3}a\right)+\pi=\frac{\pi^3}{6}\left\{\left(a-\frac{24}{\pi^3}\right)^2-\left(\frac{24}{\pi^3}\right)^2\right\}+\pi=\frac{\pi^3}{6}\left(a-\frac{24}{\pi^3}\right)^2-\frac{96}{\pi^3}+\pi$

なので、$I(a)$の最小値は

$\underline{-\frac{96}{\pi^3}+\pi}$ （$a=\frac{24}{\pi^3}$）

(3) $(ax-\sin x)^2\geqq 0$　であり，左辺は常に0の定数関数ではないから

$I(a)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(ax-\sin x)^2dx>0$

ここで(2)より$I(a)$の最小値は $-\frac{96}{\pi^3}+\pi$　であったので

$-\frac{96}{\pi^3}+\pi>0$

$\pi^4-96>0$

$(\pi^2-4\sqrt{6})(\pi^2+4\sqrt{6})>0$

$(\pi-2\cdot\sqrt[4]{6})(\pi+2\cdot\sqrt[4]{6})(\pi^2+4\sqrt{6})>0$

$\pi+2\cdot\sqrt[4]{6}>0,\pi^2+4\sqrt{6}>0$　なので

$\pi - 2\cdot\sqrt[4]{6} > 0$ より

$\pi > 2\cdot\sqrt[4]{6} = 2\cdot 1.565 = 3.13$

よって

$\pi > 3.13$(終)

総 評

1.

小問集合問題。どれも高難易なものではないが、受験生が嫌いそうなジャンルの問題が多い。

(3)の計算ミスは注意したい。

(4)について、$|z_2 - z_1| = 1$ は今回の場合なくても解けるのではないかと思う…

2.

確率漸化式の問題。

移動の確率が等しい問題はよく見かけるが、この問題では(3)で手が止まった受験生が多そうである。

a_{n+1} と b_{n+1} のそれぞれの式をみて、$\{a_n - b_n\}$ の等比型の漸化式が作れることに気づけるかがポイント。

3.

小問集合。(1)～(3)は得点したい。

(4)は計算ミスをしている受験生がかなりいそうである。

4.

(1)は定積分の計算を丁寧にやりたい。偶関数であることを利用してもよい。

(2)は単なる二次関数の最小値問題。

(3)については、$0 < \pi$ は自明として議論して良いのか迷ったが、そもそも(1)で弧度として π を使ってはいるので、$0 < \pi$ は自明としてよいと判断した。

ちなみに $\pi < 0$ として $\dfrac{1}{\pi^3}\left(\pi^4 - 96\right) > 0$ を解くと $-3.13 < \pi < 0$ となる。

以上