練習問題 1

(1) $\dfrac{8}{x^4+4}=\dfrac{Ax+B}{x^2+2x+2}+\dfrac{Cx+D}{x^2-2x+2}$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2-2x+2)+(Cx+D)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(-2A+B+2C+D)x^2+(2A-2B+2C+2D)x+2B+2D}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}$$

より，この等式が常に成り立つには

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B+2C+D=0 \\ 2A-2B+2C+2D=0 \\ 2B+2D=8 \end{cases}$$

を満たせばよいので，これを解くと

$\underline{A=1, B=2, C=-1, D=2}$

(2) $\tan^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

であり，$0<\tan\dfrac{\pi}{8}$ なので

$\tan\dfrac{\pi}{8}=\underline{\sqrt{2}-1}$

$\tan^2\dfrac{3}{8}\pi=\dfrac{1-\cos\dfrac{3}{4}\pi}{1+\cos\dfrac{3}{4}\pi}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$

であり，$0<\tan\dfrac{3}{8}\pi$ なので

$\tan\dfrac{3}{8}\pi=\underline{\sqrt{2}+1}$

(3)　(1)より

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4}dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4}dx$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{-x+2}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx-\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-4}{x^2-2x+2}dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2}{x^2+2x+2}\right)dx-\int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-\frac{2}{x^2-2x+2}\right)dx \quad \cdots ①$$

・$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx=\left[\log\left(x^2+2x+2\right)\right]_0^{\sqrt{2}}=\log\left(4+2\sqrt{2}\right)-\log 2=\log\left(2+\sqrt{2}\right)$

・$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx=\left[\log\left(x^2-2x+2\right)\right]_0^{\sqrt{2}}=\log\left(4-2\sqrt{2}\right)-\log 2=\log\left(2-\sqrt{2}\right)$

・$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2+2x+2}dx=\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{(x+1)^2+1}dx$

ここで，$x+1=\tan s$　とおくと

$$dx=\frac{ds}{\cos^2 s}$$

であり，x と s の対応は右のようになるので

x	0	$\to$	$\sqrt{2}$
$\tan s$	1	$\to$	$\sqrt{2}+1$
s	$\frac{\pi}{4}$	$\to$	$\frac{3}{8}\pi$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2+2x+2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{\tan^2 s+1}\cdot\frac{ds}{\cos^2 s}=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} 1ds=2\left[s\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}=2\left(\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

・$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2-2x+2}dx=\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{(x-1)^2+1}dx$

ここで，$x-1=\tan t$　とおくと

$$dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$$

であり，x と t の対応は右のようになるので

x	0	$\to$	$\sqrt{2}$
$\tan t$	-1	$\to$	$\sqrt{2}-1$
t	$-\frac{\pi}{4}$	$\to$	$\frac{\pi}{8}$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2-2x+2}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} 1dt=2\left[t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}}=2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}\pi$$

よってこれらを①へ代入して

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4}\,dx = \log\left(2+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{4}-\left\{\log\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{3}{4}\pi\right\}$$

$$= \log\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$= \log\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{2}+\pi$$

$$= \underline{2\log\left(\sqrt{2}+1\right)+\pi}$$

練習問題 2

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = 7$ より

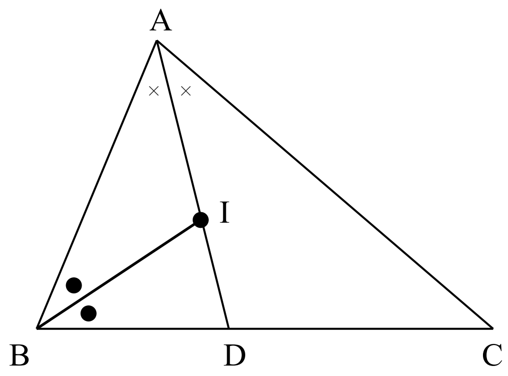
$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 7^2$

$\left|-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = 49$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 49$

$25 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + 64 = 49$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \underline{20}$ $\cdots$ [アイ]



AD は∠BAC の二等分線であるから

$BD : CD = AB : AC = 5 : 8$ $\cdots$ ①

なので

$$\overrightarrow{AD} = \frac{8\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{5+8}$$

$$= \underline{\frac{8}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\overrightarrow{AC}} \quad \cdots \ [ウ,エオ,カ,キク]$$

①より

$$BD = \frac{5}{13}BC = \frac{5\cdot 7}{13}$$

であり，BI は∠ABD の二等分線であるから

$$AI : DI = BA : BD = 5 : \frac{5\cdot 7}{13} = 13 : 7$$

よって,

$$\overrightarrow{AI} = \frac{13}{13+7}\overrightarrow{AD} = \frac{13}{20}\left(\frac{8}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\overrightarrow{AC}\right) = \underline{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}} \quad \cdots \ [ケ,コ,サ,シ]$$

$\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$

とすると,

△ABO，△ACO はそれぞれ O を頂角とする二等辺三角形より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{25}{2} \\ s\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + t\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25s + 20t = \dfrac{25}{2} \\ 20s + 64t = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10s + 8t = 5 \\ 5s + 16t = 8 \end{cases}$$

であるから，これを解くと $s = \dfrac{2}{15},\ t = \dfrac{11}{24}$ であるから

$\overrightarrow{AO} = \underline{\dfrac{2}{15}\overrightarrow{AB} + \dfrac{11}{24}\overrightarrow{AC}}$ … [ス,セソ,タチ,ツテ]

練習問題 3

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は $0<x$ において

単調減少であるから

$$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n} \quad \cdots ①$$

が成り立つ．ここで

$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$ は右の図 1 の帯の斜線部

の面積の総和であり

$$\frac{3}{2}+\int_2^{100}\frac{1}{x}dx=1+\frac{1}{2}+\int_2^{100}\frac{1}{x}dx$$

は図 2 の斜線部の面積の総和で

あるから

図より確かに

$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}<\frac{3}{2}+\int_2^{100}\frac{1}{x}dx$ である (終)

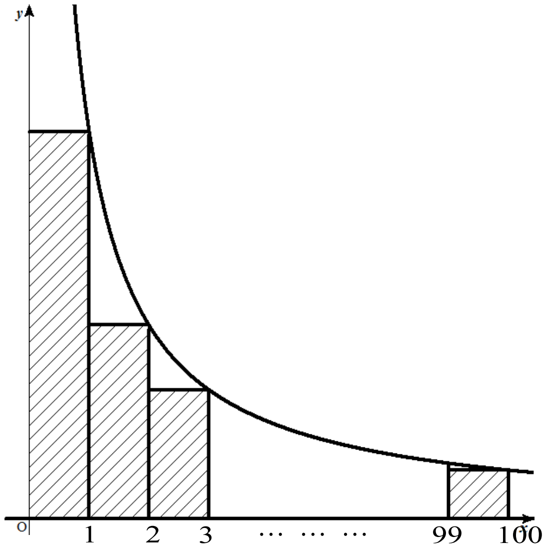


図 1

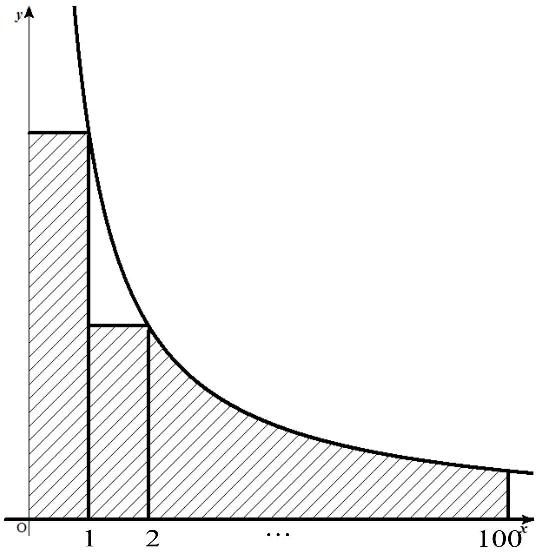


図 2

(2) (1) より

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}&<\frac{3}{2}+\left[\log x\right]_2^{100}\\&=\frac{3}{2}+\log 100-\log 2\\&=\frac{3}{2}+\log 50\\&=\frac{3}{2}+\log 25+\log 2\\&=\frac{3}{2}+2\log 5+\log 2\\&=\frac{3}{2}+2\cdot 1.609+0.693\\&=1.5+3.218+0.693\\&=5.411 \quad \cdots ①\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n}$ は右の図 3 の帯の

斜線部の面積の総和でもあり

これは $\int_1^{100} \frac{1}{x} dx$ よりも大きい.

$\int_1^{100} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{100}$ ← $\log 2$ と $\log 5$ が利用できる区間.

$$
\begin{aligned}
&= \log 100 - \log 1 \\
&= \log 25 + \log 4 \\
&= 2\log 5 + 2\log 2 \\
&= 2(\log 5 + \log 2) \\
&= 2(1.609 + 0.693) \\
&= 2 \cdot 2.302 \\
&= 4.604 \quad \cdots \text{②}
\end{aligned}
$$

よって①,②より

$$4.604 < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} < 5.411$$

なので, $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ の小数点以下を四捨五入して得られる整数は$\underline{5}$

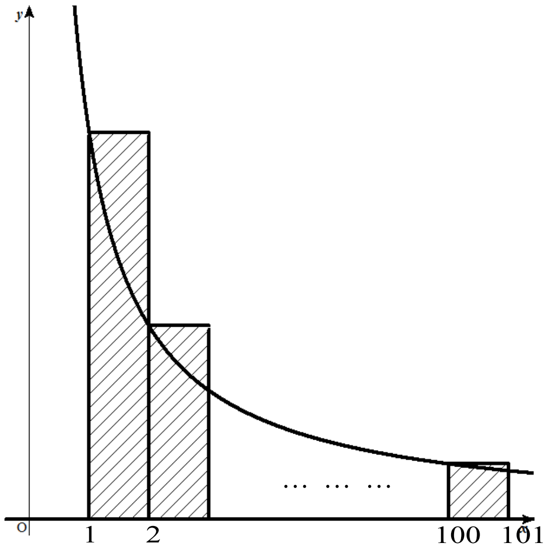


図 3