

重要問題 1

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2-4x+29}$$

と定める. 座標平面上で, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{1}{5}$ によって囲まれた図形の面積を求めよ.

(2月4日 問題5 一部抜粋)

練習問題 1

次の問いに答えよ.

- (1) 次の等式が成り立つように, 定数 A, B, C, D を定めよ.

$$\frac{8}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

- (2) $\tan \frac{\pi}{8}$, $\tan \frac{3}{8}\pi$ の値を求めよ.
- (3) 次の定積分を求めよ.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4} dx$$

(信州大学)

重要問題 2

$AB=3$, $AC=5$, $\angle A = \frac{\pi}{4}$ である $\triangle ABC$ の外心を O とするとき, 次の(a)から(c)が成り立つ.

(a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{[\text{ア}]}{[\text{イ}]}$

(b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{[\text{ウエ}]}{[\text{オ}]}$

(c) $\overrightarrow{AO} = \left([\text{カ}] - \frac{[\text{キ}]}{[\text{ク}]} \sqrt{2} \right) \overrightarrow{AB} + \left([\text{ケ}] - \frac{[\text{ク}]}{[\text{サシ}]} \sqrt{2} \right) \overrightarrow{AC}$

(2月5日 問題1(1))

練習問題 2

三角形 ABC について, $AB=5$, $BC=7$, $CA=8$ とする. このとき

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = [\text{アイ}]$$

である. $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする. このとき

$$\overrightarrow{AD} = \frac{[\text{ウ}]}{[\text{エオ}]} \overrightarrow{AB} + \frac{[\text{カ}]}{[\text{キク}]} \overrightarrow{AC}$$

である.

また, 三角形 ABC の内接円の中心を I , 外接円の中心を O とすると

$$\overrightarrow{AI} = \frac{[\text{ケ}]}{[\text{コ}]} \overrightarrow{AB} + \frac{[\text{サ}]}{[\text{シ}]} \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{[\text{ス}]}{[\text{セソ}]} \overrightarrow{AB} + \frac{[\text{タチ}]}{[\text{ツテ}]} \overrightarrow{AC}$$

である.

(獨協医科大学 一部)

重要問題 3

関数 $f(x) = \frac{x^2}{1+x+x^3}$ ($x \geq 0$) について、次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ.
- (2) $x \geq 2$ のとき, $f'(x) < 0$ であることを示せ.
- (3) 自然数 n に対して $a_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

(2月8日 問題3 一部)

練習問題 3

- (1) $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} < \frac{3}{2} + \int_2^{100} \frac{1}{x} dx$ を示せ.
- (2) $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ の小数点以下を四捨五入して得られる整数を求めよ. ただし, 必要ならば $\log 2, \log 5$ の近似値として, それぞれ $0.693, 1.609$ を用いよ.

(琉球大学)

練習問題 1

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{8}{x^4+4} &= \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2-2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (-2A+B+2C+D)x^2 + (2A-2B+2C+2D)x + 2B+2D}{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}\end{aligned}$$

より、この等式が常に成り立つには

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B+2C+D=0 \\ 2A-2B+2C+2D=0 \\ 2B+2D=8 \end{cases}$$

を満たせばよいので、これを解くと

$$\underline{A=1, B=2, C=-1, D=2}$$

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$$

であり、 $0 < \tan \frac{\pi}{8}$ なので

$$\tan \frac{\pi}{8} = \underline{\sqrt{2}-1}$$

$$\tan^2 \frac{3}{8}\pi = \frac{1 - \cos \frac{3}{4}\pi}{1 + \cos \frac{3}{4}\pi} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$$

であり、 $0 < \tan \frac{3}{8}\pi$ なので

$$\tan \frac{3}{8}\pi = \underline{\sqrt{2}+1}$$

(3) (1) より

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4} dx \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4+4} dx \\
 &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{x+2}{x^2+2x+2} + \frac{-x+2}{x^2-2x+2} \right) dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+4}{x^2+2x+2} dx - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-4}{x^2-2x+2} dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2} \right) dx - \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \frac{2}{x^2-2x+2} \right) dx \cdots \textcircled{1} \\
 &\cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = \left[\log(x^2+2x+2) \right]_0^{\sqrt{2}} = \log(4+2\sqrt{2}) - \log 2 = \log(2+\sqrt{2}) \\
 &\cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx = \left[\log(x^2-2x+2) \right]_0^{\sqrt{2}} = \log(4-2\sqrt{2}) - \log 2 = \log(2-\sqrt{2}) \\
 &\cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2+2x+2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{(x+1)^2+1} dx
 \end{aligned}$$

ここで, $x+1 = \tan s$ とおくと

$$dx = \frac{ds}{\cos^2 s}$$

x	0	\rightarrow	$\sqrt{2}$
$\tan s$	1	\rightarrow	$\sqrt{2}+1$
s	$\frac{\pi}{4}$	\rightarrow	$\frac{3}{8}\pi$

であり, x と s の対応は右のようになるので

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2+2x+2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} \frac{2}{\tan^2 s + 1} \cdot \frac{ds}{\cos^2 s} = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} 1 ds = 2 \left[s \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} = 2 \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cdot \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2-2x+2} dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{(x-1)^2+1} dx$$

ここで, $x-1 = \tan t$ とおくと

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

x	0	\rightarrow	$\sqrt{2}$
$\tan t$	-1	\rightarrow	$\sqrt{2}-1$
t	$-\frac{\pi}{4}$	\rightarrow	$\frac{\pi}{8}$

であり, x と t の対応は右のようになるので

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2-2x+2} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{2}{\tan^2 t + 1} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} 1 dt = 2 \left[t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{8}} = 2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4}\pi$$

よってこれらを①へ代入して

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{8}{x^4 + 4} dx = \log(2 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} - \left\{ \log(2 - \sqrt{2}) - \frac{3}{4}\pi \right\}$$

$$= \log\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) + \pi$$

$$= \log\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2} + \pi$$

$$= \underline{2 \log(\sqrt{2} + 1) + \pi}$$

練習問題 2

$$|\overrightarrow{BC}| = 7 \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = 7^2$$

$$|-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 = 49$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 = 49$$

$$25 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 64 = 49$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{20} \dots [\text{アイ}]$$

AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$BD : CD = AB : AC = 5 : 8 \dots \textcircled{1}$$

なので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \frac{8\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{5 + 8} \\ &= \underline{\frac{8}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\overrightarrow{AC}} \dots [\text{ウ,エオ,カ,キク}] \end{aligned}$$

①より

$$BD = \frac{5}{13}BC = \frac{5 \cdot 7}{13}$$

であり, BI は $\angle ABD$ の二等分線であるから

$$AI : DI = BA : BD = 5 : \frac{5 \cdot 7}{13} = 13 : 7$$

よって,

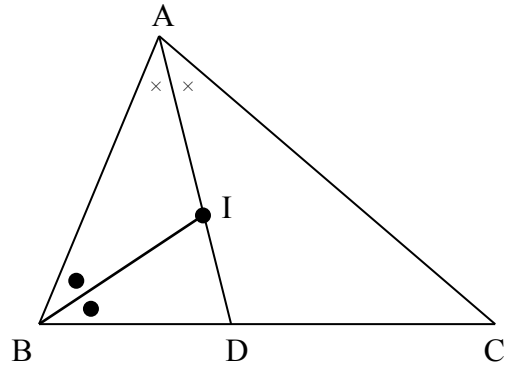
$$\overrightarrow{AI} = \frac{13}{13+7}\overrightarrow{AD} = \frac{13}{20}\left(\frac{8}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{13}\overrightarrow{AC}\right) = \underline{\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}} \dots [\text{ケ,コ,サ,シ}]$$

$$\overrightarrow{AO} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

とすると,

$\triangle ABO$, $\triangle ACO$ はそれぞれ O を頂角とする二等辺三角形より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} s|\overrightarrow{AB}|^2 + t\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{25}{2} \\ s\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + t|\overrightarrow{AC}|^2 = 32 \\ 25s + 20t = \frac{25}{2} \\ 20s + 64t = 32 \\ 10s + 8t = 5 \\ 5s + 16t = 8 \end{cases}$$

であるから、これを解くと $s = \frac{2}{15}$, $t = \frac{11}{24}$ であるから

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{11}{24}\overrightarrow{AC} \dots \text{[ス,セソ,タチ,ツテ]}$$

練習問題 3

(1) 関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ は $0 < x$ において

単調減少であるから

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ. ここで

$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ は右の図 1 の帯の斜線部の

面積の総和であり

$$\frac{3}{2} + \int_2^{100} \frac{1}{x} dx = 1 + \frac{1}{2} + \int_2^{100} \frac{1}{x} dx$$

は図 2 の斜線部の面積の総和であるから

図より確かに

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} < \frac{3}{2} + \int_2^{100} \frac{1}{x} dx \text{ である (終)}$$

(2) (1) より

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} < \frac{3}{2} + [\log x]_2^{100}$$

$$= \frac{3}{2} + \log 100 - \log 2$$

$$= \frac{3}{2} + \log 50$$

$$= \frac{3}{2} + \log 25 + \log 2$$

$$= \frac{3}{2} + 2 \log 5 + \log 2$$

$$= \frac{3}{2} + 2 \cdot 1.609 + 0.693$$

$$= 1.5 + 3.218 + 0.693$$

$$= 5.411 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ は右の図 3 の帯の

斜線部の面積の総和でもあり

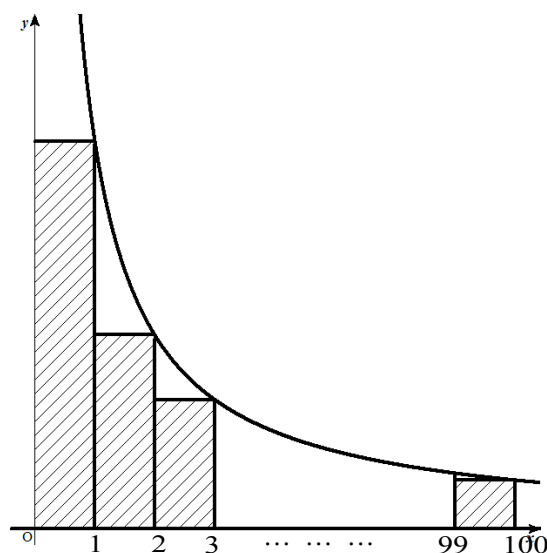


図 1

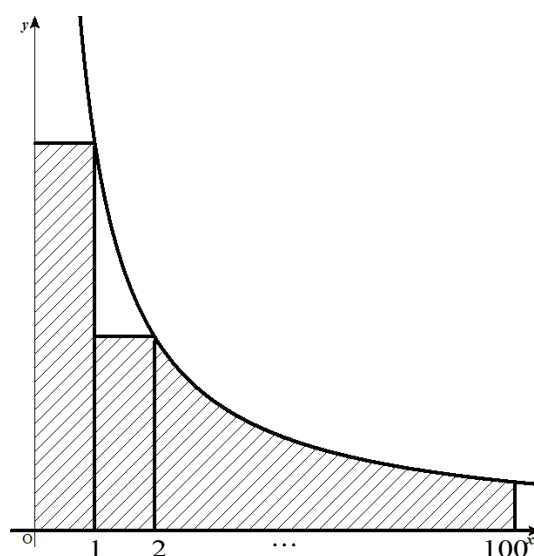


図 2

これは $\int_1^{100} \frac{1}{x} dx$ よりも大きい.

$$\int_1^{100} \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^{100} \leftarrow \log 2 \text{ と } \log 5 \text{ が利用できる区間.}$$

$$\begin{aligned} &= \log 100 - \log 1 \\ &= \log 25 + \log 4 \\ &= 2 \log 5 + 2 \log 2 \\ &= 2(\log 5 + \log 2) \\ &= 2(1.609 + 0.693) \\ &= 2 \cdot 2.302 \\ &= 4.604 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって①,②より

$$4.604 < \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} < 5.411$$

なので, $\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$ の小数点以下を四

捨五入して得られる整数は 5

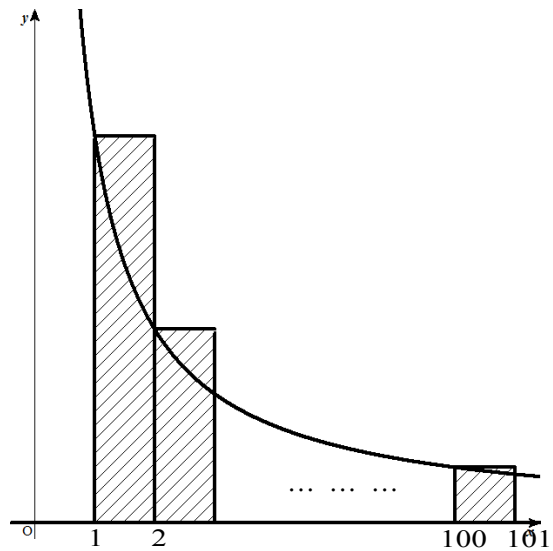


図 3