

難関理系大学受験専門塾 理系館

★制限時間は各大問 15 分

理系館 入試直前 数学問題集① ～ 差のつく解法 ～

問題 1

(1) $\sqrt{x^2 + 84}$ が整数となるような正の整数 x をすべて求めよ.

(名古屋市立大学)

(2) $x^2 + 2xy + 3y^2 = 27$ を満たす整数の組 (x, y) の中で $x - y$ の値が最大となる組を求めよ.

(早稲田大学 改)

《point》

●不定方程式の整数解

→ いかにか上手に絞り込みを行うか!

(i) 係数による倍数の特定

例) $3x = 5y$ … x は 5 の倍数

(ii) 正・負を利用した範囲の制限

例) $2x^2 = 100 - y^2$ … $100 - y^2 \geq 0$ より $-10 \leq y \leq 10$

(iii) $AB = \text{整数}$ に変形し積の組合せを探す

例) $xy + 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(y + 2) = -6$

問題 2

- (1) xy 座標平面上で, x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+2y \leq 100$ を同時に満たす格子点の個数を求めよ.

(大阪薬科大学)

- (2) n を正の整数とすると, 不等式

$$4|x| + 3|y| \leq 12n$$

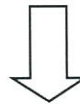
をみたす組 (x, y) のうち, x と y がともに整数である組の総数を n で表せ.

(鳥取大学)

《point》

●領域内の格子点の個数

基本解法 $y = k$ または $x = k$ (k :整数) 上の格子点の個数のうち,
 k で表しやすい方に注目し Σ 計算 ((1) はこれでうまくいく!)



どちらでもややこしくなる場合

(i) 細かく場合分けをして Σ 計算

(ii) 対称性や, キリの良い領域内の格子点の個数の足し引きを利用

問題 3

数直線上の原点に点Pがある. 点Pは,硬貨を投げて表がでれば+1,裏が出れば-1進むとする.このとき,次の問いに答えなさい.

- (1) 硬貨を10回投げたとき,点Pが+4の位置にいる確率を求めなさい.
- (2) 硬貨を10回投げたとき,点Pが1回目以降,原点も負の部分も通らずに+4の位置にいる確率を求めなさい.

(山口大学)

《point》

●デッドライン付きランダムウォーク

横軸を回数 n , 縦軸を数直線 x として, $P(n, x)$ が1回目以降で n 軸を通ることなく $P(10, 4)$ へたどり着くようなふるまいを考え, 辿り方を数える!

問題 4

座標平面上の曲線 $y = |x^2 + 2x|$ を C とする.

- (1) 曲線 C と直線 $y = x + 2$ の共有点の座標を求めよ.
- (2) 曲線 C と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(新潟大学 改)

《point》

●放物線と直線, 放物線同士で囲まれた図形の面積

$\frac{1}{6}$ 面積公式とその足し引きの駆使で極力積分計算を避ける!

問題 5

a, b を実数とし、関数 $y = e^{a+bx^2}$ のグラフを C とする。

- (1) C が点 $P(1, 1)$ を通り、 P での C の接線の傾きが -2 となる a, b を求めよ。
- (2) a, b が (1) で求めた値であるとき、放物線 $y = x^2$ と C とで囲まれた図形のうち、 y 軸の右側にある部分を y 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

(学習院大学)

《point》

● y 軸の周りの回転体の体積

→ バームクーヘン型積分で楽にできないか!?

$a \leq x \leq b$ において $0 \leq f(x)$ であるとき、 $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, x 軸で囲まれた図形を D とし、 D を y 軸に関して 1 回転してできる筒状の図形の体積を V とすると

$$V = 2\pi \int_c^d x \cdot f(x) dx$$

☆バームクーヘン型積分の仕組み

下のように、 $(0 <) a \leq x \leq b$ において $0 \leq f(x)$ とする。このとき、 $y = f(x)$ 、 $x = a$ 、 $x = b$ 、 x 軸で囲まれた図形を D とし、 D を y 軸に関して1回転してできる筒状の図形の体積を V とする。

このとき、 V を下の図のように、体積 $2\pi x \cdot f(x) \cdot \Delta x$ のとても薄い筒の $x = a$ から $x = b$ までの総和と考えることで

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

と計算している。

