難関理系大学受験専門塾　理系館

★制限時間は各大問 15 分

理系館　入試直前　数学問題集①　～ 差のつく解法 ～

問題 1

(1)　$\sqrt{x^2+84}$ が整数となるような正の整数 x をすべて求めよ.

(名古屋市立大学)

(2)　$x^2+2xy+3y^2=27$ を満たす整数の組 (x,y) の中で $x-y$ の値が最大となる組を求めよ.

(早稲田大学　改)

≪point≫

●不定方程式の整数解

→ いかに上手に絞り込みを行うか!

（ⅰ）係数による倍数の特定

例）$3x=5y$ … x は5の倍数

（ⅱ）正・負を利用した範囲の制限

例）$2x^2=100-y^2$ … $100-y^2 \geqq 0$ より $-10 \leqq y \leqq 10$

（ⅲ）$AB=$整数 に変形し積の組合せを探す

例）$xy+2x-3y=0 \Leftrightarrow (x-3)(y+2)=-6$

問題 2

(1)　xy 座標平面上で，x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+2y \leqq 100$ を同時に満たす格子点の個数を求めよ．

(大阪薬科大学)

(2)　n を正の整数とするとき，不等式

$$4|x|+3|y| \leqq 12n$$

をみたす組 (x, y) のうち，x と y がともに整数である組の総数を n で表せ．

(鳥取大学)

≪point≫

●領域内の格子点の個数

$\boxed{\text{基本解法}}$　$y=k$　または　$x=k$　(k：整数)　上の格子点の個数のうち，
k で表しやすい方に注目しΣ計算 ((1) はこれでうまくいく!)

$\Downarrow$ どちらでもややこしくなる場合

(ⅰ) 細かく場合分けをしてΣ計算

(ⅱ) 対称性や，キリの良い領域内の格子点の個数の足し引きを利用

問題 3

数直線上の原点に点Pがある．点Pは,硬貨を投げて表がでれば$+1$,裏が出れば-1進むとする.このとき,次の問いに答えなさい.

(1)　硬貨を10回投げたとき，点Pが$+4$の位置にいる確率を求めなさい.

(2)　硬貨を10回投げたとき，点Pが1回目以降,原点も負の部分も通らずに$+4$の位置にいる確率を求めなさい.

(山口大学)

≪point≫

●デッドライン付きランダムウォーク
横軸を回数n，縦軸を数直線xとして，$\mathrm{P}(n,x)$が1回目以降でn軸を通ることなく$\mathrm{P}(10,4)$へたどり着くようなふるまいを考え，辿り方を数える!

問題 4

座標平面上の曲線 $y=\left|x^2+2x\right|$ をCとする.

(1) 曲線Cと直線 $y=x+2$ の共有点の座標を求めよ.

(2) 曲線Cと直線 $y=x+2$ で囲まれた部分の面積Sを求めよ.

(新潟大学　改)

≪point≫

●放物線と直線，放物線同士で囲まれた図形の面積

$\frac{1}{6}$面積公式とその足し引きの駆使で極力積分計算を避ける!

問題 5

a, b を実数とし，関数 $y=e^{a+bx^2}$ のグラフを C とする.

(1)　C が点 $\mathrm{P}(1,1)$ を通り，P での C の接線の傾きが -2 となる a, b を求めよ.

(2)　a, b が (1) で求めた値であるとき，放物線 $y=x^2$ と C とで囲まれた図形のうち，y 軸の右側にある部分を y 軸の周りに1回転して得られる立体の体積を求めよ.

(学習院大学)

≪point≫

● y 軸の周りの回転体の体積

→ バームクーヘン型積分で楽にできないか!?

$a \leqq x \leqq b$ において $0 \leqq f(x)$ であるとき，$y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, x 軸で囲まれた図形を D とし，D を y 軸に関して1回転してできる筒状の図形の体積を V とすると

$$\boxed{V=2\pi\int_c^d x\cdot f(x)dx}$$

☆バームクーヘン型積分の仕組み

下のように，$(0<)a \leqq x \leqq b$ において $0 \leqq f(x)$ とする．このとき，$y=f(x)$，$x=a$，$x=b$，x 軸で囲まれた図形を D とし，D を y 軸に関して1回転してできる筒状の図形の体積を V とする．

このとき，V を下の図のように，体積 $2\pi x \cdot f(x) \cdot \Delta x$ のとても薄い筒の $x=a$ から $x=b$ までの総和と考えることで

$$\boxed{V = 2\pi \int_c^d x \cdot f(x) dx}$$

と計算している．