

難関理系大学受験専門塾 理系館

★制限時間は各大問 20 分

理系館入試直前数学問題集② ～ 難問へのアプローチ ～

問題 1

空間に点 O と三角錐 $ABCD$ があり,

$$OA = OB = OC = 1, \quad OD = \sqrt{5},$$

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA,$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

を満たしている。三角錐 $ABCD$ に内接する球の半径を求めよ。

(早稲田大学)

《point》

●式の対称性を見抜く

・ $OA = OB = OC = 1$ から O, A, B, C の位置関係は?

・ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ からわかることは?

●内接球の半径

→ 体積の利用

問題 2

- (1) 定積分 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} dt$ を求めよ.
- (2) 不等式 $x^2 + y^2 + \log(1+z^2) \leq \log 2$ の定める立体の体積を求めよ.

(埼玉大学)

《point》

●回転体でない立体の体積

xy 平面, yz 平面, zx 平面のいずれかによる断面積を関数化し, 細かい柱体の体積の総和と考える!

$x^2 + y^2 + \log(1+z^2) \leq \log 2$ の x, y, z のいずれかを定数にしたとき, 断面が比較的わかりやすい図形になるのは?

問題 3

複素数 z ($z \neq 1$) に対し, 複素数 w を $w = \frac{3z-1}{z-1}$ で定める. また, 実部が負であるよ

うな複素数の範囲を D とする.

- (1) z が D の範囲を動くとき, w の動く範囲を複素数平面上に図示せよ.
- (2) 実数 a が $0 < a < 1$ の範囲を動き, かつ z が D の範囲を動くとき, aw の動く範囲を複素数平面上に図示せよ.

(横浜国立大学 改)

《point》

● w の動く範囲の図示

→ w についての式に直す. (円になることが多い)

● z の実部が負

→ $z = a + bi$ (a, b が実数) としたとき, $a < 0$
でも良いが,

$$a = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ であることからわかるように}$$

$$\boxed{z \text{ の実部が負} \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0}$$

と考えることもできる.

難関理系大学受験専門塾 理系館

理系館入試直前 数学問題集② ～ 難問へのアプローチ ～ 略解

問題 1

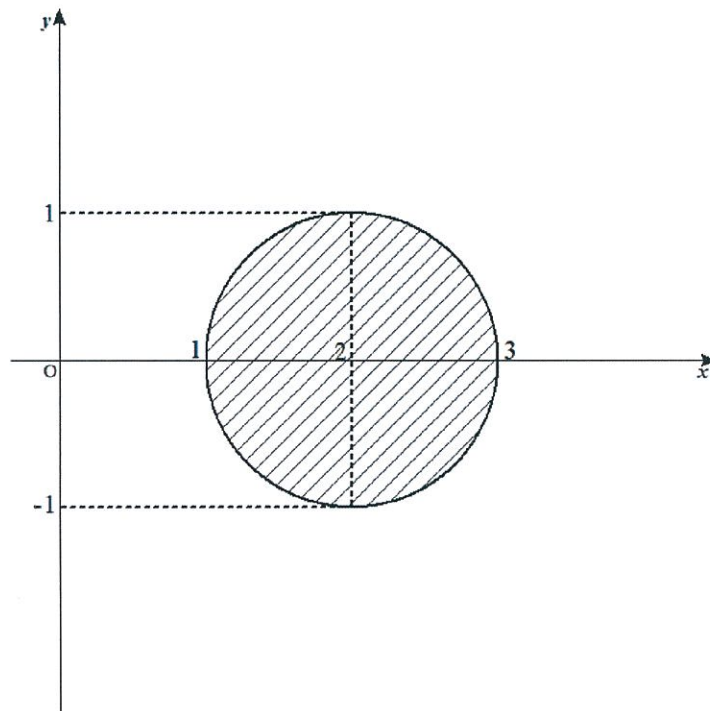
$$\frac{2}{15}\sqrt{5}$$

問題 2

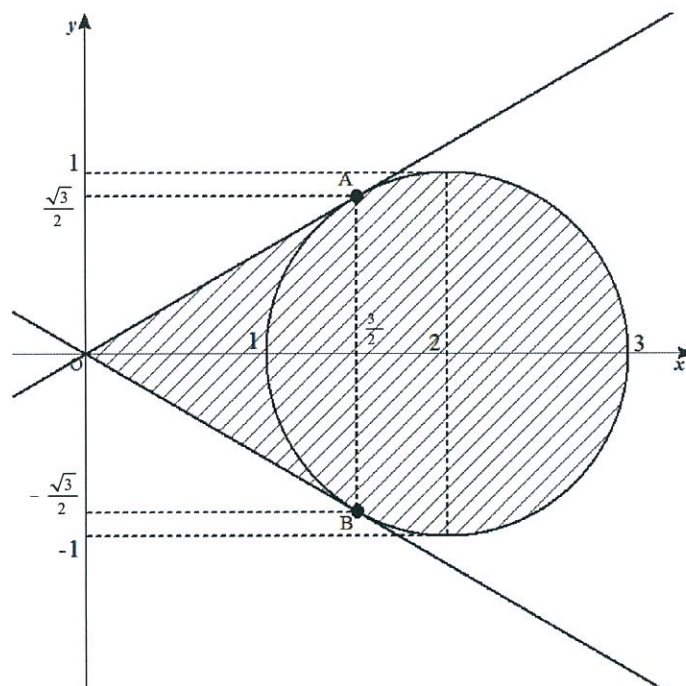
(1) $1 - \frac{\pi}{4}$ (2) $\pi(4 - \pi)$

問題 3

(1)



(2)



★詳細な解説解答は理系館 HP から別途映像へ